NAUKA 2/2006 • 45-64

KAZIMIERZ SOBCZYK

Losowość, złożoność, prognozowalność: próby zrozumienia

Przyszłość jest otwarta.
Nie jest z góry wyznaczona,
a więc nie można jej przewidzieć,
chyba że przez przypadek.
K.R. Popper

Losowość: w poszukiwaniu sensu

Niepewność, nieokreśloność i losowość zdarzeń oraz zjawisk niepokoją ludzi od najdawniejszych czasów. Nic dziwnego, człowiek w naturalny sposób odczuwa bowiem potrzebę ładu i przewidywalności w swym życiu codziennym, w ocenie zjawisk przyrodniczych i społecznych. Niepewność zdarzeń i procesów, często ich „zupełna" przypadkowość, jest główną przyczyną trudności w przewidywaniu (prognozowaniu, predykcji) przyszłości i w podejmowaniu racjonalnych decyzji.

Różne formy przypadku znane są każdemu z codziennych doświadczeń. Losowość obserwujemy w wynikach rzutu monetą czy kostką do gry, ale także w przebiegu zjawisk meteorologicznych, szczególnie silnie manifestującą się np. w huraganach powodujących groźne skutki dla ludzi i obiektów technicznych. Losowość tkwi też np. w zachowaniu się cząsteczek gazu (fizyka), mutacji genów (biologia), w rozpadzie pierwiastków promieniotwórczych. Jest obecna w zachowaniu się złożonych systemów społecznych i ekonomicznych (socjologia, ekonomia) na skutek różnych skomplikowanych (często nieprzewidywalnych) oddziaływań między ich elementami. Filozofowie i uczeni od czasów starożytnych doceniali rolę przypadku w życiu i w przebiegu zjawisk natury, nie dostrzegali jednak dość długo możliwości badania zjawisk losowych i mierzenia niepewności. Losowość była zawsze nie tylko intrygująca, ale także trudna do rozpoznania i zrozumienia.

Ta swoista tajemniczość losowości pozostaje aktualna w istocie do dnia dzisiejszego, stanowiąc źródło nieustających wysiłków uczonych i towarzyszących im sporów filozoficznych. Życie byłoby bowiem bardzo trudne, gdyby zdarzenia następowały przy-

---

Prof. dr hab. Kazimierz Sobczyk, członek korespondent PAN, Zakład Dynamiki Układów Złożonych, Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN, Warszawa

padkowo, w sposób całkowicie nieprzewidywalny (warto też mieć świadomość, iż byłoby bardzo nieciekawe, gdyby wszystko było deterministyczne i całkowicie przewidywalne).

Trudności z losowością wiążą się z podstawowymi pytaniami dotyczącymi istoty przypadku: co to jest przypadek? Jakie zjawiska rzeczywiste są *naprawdę* przypadkowe (losowe)? Czy można mówić o ich przewidywalności? Jaki rodzaj niepewności, nieokreśloności czy rozmytej, niepełnej informacji o zjawisku można uznać za losowość? Czy analiza przypadku (losowości) jest *konieczna* dla poznania mechanizmów przyrody?

Rozważmy prosty przykład. Postawmy bryłę geometryczną nazywaną stożkiem na jego wierzchołku i uwolnijmy go (tak delikatnie, jak to jest tylko możliwe); stożek upadnie na jedną stronę. Mówimy, że „przypadek" zdecyduje, na którą. W istocie, gdyby stożek był *idealnie* symetryczny, gdyby jego oś była *idealni*e prostopadła (do płaszczyzny, na której stożek jest stawiany), gdyby *nie istniały* inne siły poza siłą grawitacji, stożek nie upadłby nigdy; stałby na swoim wierzchołku! Ale musi istnieć jakaś *niemierzalna* asymetria lub *niezauważalne* odchylenie od pozycji pionowej, lub *nieodczuwalny* strumień powietrza i... przypadek decyduje. Gdy eksperyment powtórzymy, stożek upadnie w innym kierunku – z nieznanej przyczyny (!). Oto przykład zjawiska losowego – małe, niezauważalne przyczyny powodują duży efekt. Można wyobrazić sobie wiele analogicznych „mechanizmów" losowości.

Innego przykładu losowości dostarcza nam fizyka statystyczna w postaci kinetycznej teorii gazów; przedmiotem zainteresowania jest bardzo duża zbiorowość cząstek gazu (rzędu 10^{23}), znajdujących się w ciągłym, bezładnym ruchu i ulegających w ciągu każdej sekundy ogromnej liczbie wzajemnych zderzeń. Usiłowanie dokładnego scharakteryzowania ruchu każdej cząsteczki jest nierealne. Tutaj losowość jest powodowana dużą złożonością dynamiczną układu.

Mimo istnienia wielości różnych szczególnych zjawisk, których losowość wydaje się być intuicyjnie oczywista, ogólna odpowiedź na pytania dotyczące istoty losowości nastręcza poważne trudności. Toteż większość autorów znanych książek dotyczących przypadku zwykle rezygnuje z prób jego definiowania. Na przykład, M. Born w swej książce *Natural Philosophy of Cause and Chance* (1949 r.) pisze „Pojęcia przyczyny i przypadku ...nie są konkretnymi pojęciami fizycznymi, lecz mają dużo szersze znaczenie i zastosowanie... Przekraczałoby moje możliwości, aby dać tutaj ich właściwą interpretację. Przyroda, jak i życie ludzkie wydają się być poddane zarówno konieczności, jak i przypadkowi. Tym niemniej, nawet przypadek nie jest całkowicie dowolny".

Nie możemy też dowiedzieć się wiele o istocie przypadku z książki D. Bohma *Causality and Chance in Modern Physics* (1957 r.). W tym kontekście godna uwagi jest opinia V. Nalimova – rosyjskiego metodologa nauki (por. [18], [19]) – przytoczona przez J. Zabczyka w jego interesującym artykule [30]: „Nalimov twierdzi, że próby zrozumienia przypadku »ontologicznie« dlatego kończą się niepowodzeniem, bo chce się osiągnąć rzecz niemożliwą: wytłumaczyć przypadek za pomocą pojęć deterministycznych. Nalimov uważa, że należy się pogodzić z faktem istnienia obok siebie dwóch sposobów widzenia zjawisk: deterministycznego i probabilistycznego. Teorie są jedynie wyrazem tych dwóch podejść i służą porządkowaniu dopływających do nas wrażeń i faktów". Należy zauważyć, że Nalimov mówi nie o dwóch rodzajach zjawisk, ale o „dwóch sposobach widzenia zjawisk". Zjawiska są takie, jakie są, a my – dla celów ich teoretycznego (tj. matematycznego) opisywania i analizowania – „traktujemy" je jako deterministyczne lub losowe, zależnie od stopnia ich komplikacji czy nieregularności, rodzaju dostępnej informacji itp. Wydaje się, iż takie – można powiedzieć, uproszczone – podejście jest bliskie (i pomocne) tym, którzy zajmują się zastosowaniami, tj. matematycznym modelowaniem i analizą zjawisk rzeczywistych.

Niezależnie od wskazanych wyżej trudności w zadowalającym ustaleniu przyczyn i zakresu „funkcjonowania" przypadku, nauka wybrała podejście pragmatyczne; uznała, iż zjawiska, których losowość wydaje się intuicyjnie oczywista (lub jest ich cechą dominującą), powinny stać się przedmiotem jej zainteresowania – że należy starać się rozpoznawać tkwiące w nich prawidłowości, matematycznie je opisywać i ilościowo charakteryzować. Około 200 lat temu C. F. Gauss (1777-1855) badał (probabilistycznie) prawa błędów pomiarowych i zaproponował sposoby ich szacowania. Nieco później L. Boltzmann (1844-1906) podał statystyczną interpretację jednego z podstawowych twierdzeń fizyki – drugiej zasady termodynamiki, wprowadzając pojęcie entropii statystycznej (analogicznej do entropii zdefiniowanej później w terminach gęstości rozkładu prawdopodobieństwa). Następnie, na początku XX w., fizyka doznała prawdziwego metodologicznego wstrząsu w postaci mechaniki statystycznej i rozkładów Gibbsa (1903 r.), probabilistycznego opisu ruchów Browna (Einstein – Smoluchowski, 1905-1906) i równania Langevina (1908 r.), zawierającego szum losowy i będącego pierwowzorem całej dzisiejszej dynamiki stochastycznej (por. [26]).

Wymienione wyżej idee i inne konkretne rezultaty badawcze, które tutaj nie zostały wyszczególnione, postawiły przed matematyką w pierwszych dekadach XX wieku nowe wyzwania. Oto losowość i myślenie probabilistyczne zyskały sobie prawo „obywatelstwa" w ówczesnej nauce i oczekiwały na właściwe metodyczne wsparcie; nade wszystko zaistniała potrzeba na sformalizowanego języka matematycznego zdolnego ujmować i liczbowo charakteryzować prawidłowości w zakresie zjawisk losowych. Wyłoniły się też problemy ogólniejsze – filozoficzne, dotyczące poznawczego statusu wypowiedzi probabilistycznych i sensu przewidywalności/prognozowalności zjawisk, którym towarzyszy niepewność, niepełna określoność lub krótko: losowość.

Klasyczny determinizm, uznający, iż świat ma logiczną strukturę wyrażoną w prawach przyczynowych (i głoszący ścisłą przewidywalność przyszłych stanów układu, gdy znany jest jego stan początkowy), okazał się niewystarczający. Ten długo akceptowany prąd umysłowy – obejmujący przez około dwa wieki (XVIII-XIX) ówczesną naukę i wspierany przez silnie zakorzenioną wiarę we wszechmoc mechaniki Newtona – musiał udostępnić pola nowej – statystycznej/probabilistycznej – idei interpretowania zjawisk rzeczywistych i definiowania ich prognozowalności.

Prawdopodobieństwo i świat realny

Prawdopodobieństwem i szerzej – poszukiwaniem ilościowych miar losowości – interesowano się znacznie wcześniej, zanim powstała teoria prawdopodobieństwa jako dziedzina matematyki. Już od XVII w. gry hazardowe, różne zagadnienia demograficzne, a potem fizyka statystyczna stanowiły pole interesujących i dość efektywnych poszukiwań.

W tym wczesnym okresie udowodnione zostały też w prostej postaci takie podstawowe twierdzenia, jak prawo wielkich liczb (1714 r.) i centralne twierdzenie graniczne (1730 r.). Warto zauważyć, iż ważne miejsce w tej wczesnej fazie rozwoju rachunku prawdopodobieństwa zajmuje P.S. Laplace (1749-1822), ten sam, który znany jest jako głosiciel ścisłego determinizmu poznawczego opartego na dynamice Newtona („jeżeli określicie mi pozycje i prędkości wszystkich cząstek we Wszechświecie, ja przewidzę całą przyszłość”). W tym czasie badania w zakresie rachunku prawdopodobieństwa nie inspirowały jeszcze pytań natury filozoficznej. Jest interesujące, że w Polsce pierwszy publiczny odczyt na temat prawdopodobieństwa został wygłoszony przez Jana Śniadeckiego dopiero w 1817 roku w Wilnie (por. [30], str. 9).

Narodziny nowoczesnej matematycznej teorii prawdopodobieństwa wiążą się z nazwiskiem A.N. Kołmogorowa, który w roku 1933 zaproponował teorię aksjomatyczną opartą o teorię miary [10] [1]. W ten sposób terminologia i specyficzne problemy rozwijanego wcześniej rachunku prawdopodobieństwa mogły być wyrażone w ścisłym języku nowoczesnej matematyki. Podstawowym schematem (modelem) tej teorii prawdopodobieństwa jest trójka obiektów $(\Gamma, \mathscr{F}, P)$: gdzie Γ – dany zbiór – nazywany zbiorem zdarzeń elementarnych (reprezentujący zbiór wszystkich możliwych wyników doświadczenia związanego z rozważanym zjawiskiem losowym), $\mathscr{F}$ – rodzina podzbiorów podstawowego zbioru Γ (spełniająca określone warunki) i P – prawdopodobieństwo lub miara probabilistyczna określona na $\mathscr{F}$, tj. P jest funkcją, której argumentami są możliwe podzbiory $\mathscr{F}$ (nazywane zdarzeniami losowymi), przy czym jest to funkcja, która spełnia następujące warunki (*aksjomaty prawdopodobieństwa*):

- dla każdego zbioru A należącego do $\mathscr{F}$: $0 \leq P(A) \leq 1$;

[1] Teoria miary to – mówiąc w uproszczeniu – dziedzina matematyki badająca funkcje określone na rodzinie zbiorów, tj. takie, których argumentami są zbiory, a wartościami – liczby rzeczywiste (lub zespolone); zwykle zakłada się, że funkcje te spełniają pewne dodatkowe warunki.

- $P(\Gamma) = 1$, tzn. prawdopodobieństwo zdarzenia A obejmującego wszystkie możliwe zdarzenia elementarne (tj. gdy $A = \Gamma$) jest równe jedności;
- jeżeli $A_1, A_2, \ldots$ w ilości skończonej lub przeliczalnej należą do rodziny $\mathcal{F}$ zdarzeń losowych i są one wzajemnie rozłączne (parami rozłączające się), to prawdopodobieństwo sumy (alternatywy) tych zdarzeń równa się sumie ich prawdopodobieństw; zapisujemy to sposób następujący: $P(\cup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$, $i = 1, 2, \ldots$

Pojęcie prawdopodobieństwa zdefiniowane wyżej stanowi podstawowy element w konstrukcji całej współczesnej teorii prawdopodobieństwa, będącej ogromną i bardzo żywą dziedziną matematyki. Ta aksjomatyczna teoria prawdopodobieństwa dostarcza metod do modelowania i analizy szerokiej różnorodności zjawisk losowych – w tym zjawisk zmieniających się w czasie (teoria procesów losowych (stochastycznych)) i w przestrzeni (teoria pól losowych i geometria stochastyczna), a także wskazuje, jak należy wydobywać i analizować informacje zawarte w danych liczbowych, pochodzących z obserwacji i badań doświadczalnych (statystyka matematyczna).

Czy *wszystko* jednak jest oczywiste? Niestety, odpowiedź nie może być twierdząca. Spory metodologiczne wokół samego pojęcia prawdopodobieństwa i wokół statusu poznawczego teorii prawdopodobieństwa, toczące się od wielu dziesięcioleci, ciągle trwają (por. S. Amsterdamski [2]). Jest interesujące, że sporom tym nie pomagają coraz to nowe i różnorodne zastosowania teorii prawdopodobieństwa (!). Jakie są główne „ogniska” sporów wokół prawdopodobieństwa i jego aksjomatycznej teorii? Nie jest możliwe, aby w tym eseju dać obraz wszystkich wątpliwości i trudności zawartych w powyższym pytaniu. Skoncentrujemy naszą uwagę tylko na niektórych z nich.

Wydaje się, iż podstawową sprawą, nad którą trzeba zatrzymać myśli, jest „aksjomatyczność” teorii prawdopodobieństwa. Każda zaksjomatyzowana teoria posiada swoją przejrzyście określoną strukturę logiczną; aksjomatyka daje ramy dla prowadzenia wywodów dedukcyjnych i pozwala na swobodne rozwijanie konstrukcji matematycznych – abstrakcyjnych bez odwoływania się do świata realnego, bo podstawowe pojęcia są „odmaterializowane”. Zauważmy, że określona wyżej podstawowa trójka obiektów: $(\Gamma, \mathcal{F}, P)$ to twory czysto matematyczne (dany zbiór, jego podzbiory, funkcja określona na zbiorach). W związku z tym, jak stwierdza B. Russel [22], „Trzeba zdawać sobie sprawę z tego, że dowolne pojęcie spełniające wymogi aksjomatyki może być uznane za pojęcie prawdopodobieństwa. W istocie może się okazać, że w jednym przypadku wygodniej jest przyjąć jedną interpretację, w drugim – inną”. Ważne jest więc znalezienie pomostu między niezinterpretowanym systemem aksjomatów a wielkościami ze świata realnego.

Przedmiotem sporów stało się więc ważne pytanie: jak związać prawdopodobieństwo (w aksjomatycznej teorii Kołmogorowa) ze zjawiskami świata rzeczywistego? W metodologicznych dyskusjach stawiane są też pytania: czemu i ze względu na co przysługiwać może prawdopodobieństwo? Czy prawdopodobieństwo jest wielkością mierzalną?

Trzeba w tym miejscu zauważyć, że dyskusje wokół statusu i sensu prawdopodobieństwa mogą być i są wielokierunkowe. W życiu potocznym, ale i w nauce, słowo „prawdopodobieństwo" nie jest bowiem jednoznaczne, ma różne interpretacje. Jedna z ważnych interpretacji to prawdopodobieństwo jako charakterystyka sądów, tzn. że charakteryzuje ono relacje sądów do czegoś innego (np. „wypowiedziana hipoteza jest prawdopodobnie błędna"). Ta koncepcja jest często nazywana prawdopodobieństwem logicznym i wiąże się głównie z nazwiskiem R. Carnapa (por. [5], [6]). Celem Carnapa było stworzenie ilościowej logiki indukcyjnej, której podstawową kategorią byłoby pojęcie prawdopodobieństwa, czyli stopnia logicznego uzasadnienia (por. [5]).

Tutaj, kiedy mówimy o prawdopodobieństwie i teorii Kołmogorowa, mamy na myśli – tak jak to stwierdza na wstępie do swej pięknej książki W. Feller [7] – „coś co mogłoby być nazwane prawdopodobieństwem *fizycznym* lub *statystycznym* [...] nasze prawdopodobieństwa odnoszą się nie do sądów, lecz do możliwych wyników doświadczenia". Możliwe wyniki owego (myślowego lub rzeczywistego) doświadczenia tworzą naszą przestrzeń zdarzeń elementarnych Γ w nakreślonym wcześniej ogólnym schemacie/modelu aksjomatycznej teorii prawdopodobieństwa. W celu związania prawdopodobieństwa interesujących nas zdarzeń realnego świata należy – w każdej sytuacji – dokładnie rozpoznać i zdefiniować zbiór Γ oraz rodzinę zdarzeń losowych $\mathscr{F}$, a następnie – uwzględniając specyficzne cechy rozważanego zjawiska losowego – skonstruować unormowaną funkcję P(A) na zdarzeniach losowych – elementach rodziny $\mathscr{F}$. Jeżeli zbiór Γ wszystkich możliwych wyników doświadczenia jest skończony, tj. zawiera skończoną liczbę punktów, to przy pewnych dodatkowych hipotezach (które zawsze są elementem zastosowań matematyki) – np. że doświadczenie generujące wyniki (punkty próbkowe) jest powtarzalne, prawdopodobieństwo P(A) jest określone przez *częstość względną* zajścia danego zdarzenia, tj. $P(A) = m/n$ (gdzie n oznacza liczbę wszystkich możliwych wyników, zaś m – liczbę wyników sprzyjających realizacji zdarzenia A); dokładną wartość prawdopodobieństwa otrzymujemy, gdy n jest „dostatecznie duże", dokładniej – kiedy n dąży do nieskończoności (statystyczno-empiryczna częstościowa interpretacja R. von Misesa).

Zarzuty, jakie są wysuwane, dotyczą różnych aspektów. Na przykład, tak zdefiniowane prawdopodobieństwo nie poddaje się weryfikacji (testyfikacji); żadna skończona liczba doświadczeń (a więc jedynie wykonalna) nie jest w stanie ani potwierdzić, ani definitywnie sfalsyfikować wartości P(A), bo dokładną wartość prawdopodobieństwa otrzymuje się, gdy n dąży do nieskończoności. Poza tym, taka interpretacja ogranicza się tylko do wyników doświadczeń powtarzalnych i powtórzenia muszą być dokonywane w tych samych warunkach (!).

Kołmogorow przedkładając swoją aksjomatyczną teorię był świadomy tych trudności (cf. J. von Plato [20] i dyskusję tam zawartą). Trzydzieści lat później Kołmogorow pisze (por. [11], także [30]): „Stwierdzałem już wcześniej, że zastosowania matematycznej teorii prawdopodobieństwa muszą się opierać na pewnej postaci podejścia częstościowego... Jednakże od dawna utrzymywałem, że podejście częstościowe oparte na pojęciu częstości granicznej, gdy liczba prób zmierza do nieskończoności, nie przyczynia się w żadnym stopniu do nadania pojęciom teorii prawdopodobieństwa realnego charakteru, jako że zawsze mamy do czynienia ze skończoną liczbą prób. Podejście częstościowe zastosowane do dużej, lecz skończonej liczby prób nie pozwala na poprawne potraktowanie w ramach czystej matematyki". Kołmogorow stwierdza dalej, iż nadal podtrzymuje ważność interpretacji częstościowej, jeśli zaś chodzi o losowość w dużych, ale skończonych populacjach, to – uważa, iż może ona być matematycznie sformalizowana. Ma tutaj na myśli interpretację losowości w terminach złożoności obliczeniowej (por. [12], a także dalszą część tego eseju).

Poza scharakteryzowaną wyżej trudnością rozpatrywane są też inne zarzuty i słabości dotyczące aplikacyjnej efektywności konstrukcji tkwiących u podstaw teorii Kołmogorowa. Na przykład, stawiane jest pytanie: czy w praktyce zbiór Γ – przestrzeń zdarzeń elementarnych – może być zawsze jednoznacznie i wyczerpująco zidentyfikowany? Teoria zakłada, że zbiór Γ jest dany, co oznacza, że w zastosowaniach do zjawisk realnych jest *a priori* rozpoznany; natomiast zidentyfikowanie wyników (obserwacji, eksperymentu) może nie być rzeczą prostą. Wyczerpująca liczba wyników może być trudna do uzyskania w sytuacjach o „wysokim stopniu niepewności" (np. niektórzy autorzy wskazują na trudności w skonstruowaniu przestrzeni Γ dla zjawisk socjologicznych czy ekonomicznych). Problem charakteryzowania przestrzeni Γ (nazywanej też przestrzenią próbek) łączy się mocno ze statystyką matematyczną (por. L. J. Savage *Foundations of statistics*, Wiley, New York 1954; s. 82-91 – o wyborze przestrzeni próbek).

Wspomnijmy o jeszcze jednej kwestii. Ważnym elementem aksjomatycznej teorii prawdopodobieństwa jest pojęcie niezależności zdarzeń losowych (w istocie można powiedzieć, że niezależność zdarzeń jest tym, co odróżnia teorię prawdopodobieństwa od teorii miary). Pojawia się jednak trudność: jak scharakteryzować ściśle wszystkie te przesłanki, które pozwalałyby stwierdzać, iż dane realne zdarzenia są niezależne? Obszerna dyskusja spornych problemów związanych z teorią prawdopodobieństwa i jej relacjami ze światem realnym zawarta jest w książce T.L. Fine'a [8]. Autor przedstawia też inne możliwe podejścia do charakteryzacji losowości. Zarówno teoria aksjomatyczna jak i owe inne propozycje (bez wątpienia o wiele mniej rozwinięte) nie budzą u Fine'a entuzjazmu. Wydaje się jednak, że prezentowane w tej książce poglądy są zbyt krytyczne i nie uwzględniają podstawowego faktu, iż większość zastosowań czystej matematyki do opisu zjawisk realnych wiąże się z metodycznymi trudnościami. W zastosowaniach piękno i standardy czystej matematyki przestają być celem zasadniczym; równie ważne są hipotezy empiryczne, uproszczenia i przybliżenia oraz intuicja badacza.

Jaki jest więc (w obliczu sporów metodologicznych przedstawionych wyżej) poznawczy status współczesnej teorii prawdopodobieństwa? W szczególności, jaka jest jej rola w wyjaśnianiu i przewidywaniu zjawisk rzeczywistych? Teoria prawdopodobieństwa jest dzisiaj obszerną dziedziną matematyki (czystej), mocno związaną z analizą matematyczną, teorią miary i analizą funkcjonalną, i posiadającą bardzo szerokie i różnorodne zastosowania. Jej istotę i cele dobrze określa W. Feller – jeden z najwybitniejszych współczesnych probabilistów, były profesor Uniwersytetu w Princeton – we wstępie do swej wyjątkowej dwutomowej książki [7]: „Rachunek prawdopodobieństwa jest dyscypliną matematyczną o celach pokrewnych do tych, jakie mają na przykład geometria i mechanika teoretyczna [...]. W wytłumaczenie »prawdziwego znaczenia« prawdopodobieństwa nie będziemy wkładali więcej wysiłku niż fizyk nowoczesny w wytłumaczenie realnego sensu pojęć masy i energii lub geometra w wyjaśnienie istoty punktu. Natomiast będziemy udowadniali ścisłe twierdzenia i pokazywali jak się je stosuje w praktyce [...]. Prawdopodobieństwa odgrywają dla nas taka samą rolę jak masy w mechanice: można rozważać ruchy w układzie planetarnym nie znając mas indywidualnych i nie rozpatrując metod ich efektywnego pomiaru; można również rozpatrywać z korzyścią ruch nie istniejącego układu planetarnego. Teoria prawdopodobieństwa byłaby skuteczna i użyteczna nawet w tym przypadku, gdybyśmy nie znali ani jednej wartości liczbowej prawdopodobieństwa. Będziemy zajmowali się modelami teoretycznymi, w których prawdopodobieństwa będą pojawiać się jako wolne parametry, mniej więcej tak samo jak masy w mechanice. Można będzie je stosować na wiele różnorakich sposobów. Technika zastosowań i intuicja będzie rozwijała się wraz z teorią”.

Jak widać W. Feller nie obawia się trudności filozoficznych w łączeniu teorii prawdopodobieństwa ze światem realnym. Jego nastawienie jest wyraźnie optymistyczne i przyjazne zastosowaniom, zaś jego (cytowana wyżej) książka stanowiła w kilku ostatnich dekadach XX w. źródło inspiracji dla badaczy (matematyków, fizyków, przyrodników inżynierów-teoretyków) w ich wysiłkach dotyczących rozpoznawania i opisywania prawidłowości w zakresie rzeczywistych zjawisk losowych. W chwili obecnej teoria prawdopodobieństwa jest jedną z najszybciej rozwijających się dziedzin matematyki, a jej język ogarnia coraz to nowe obszary otaczającej nas rzeczywistości. W szczególności pozwala ona na nowe – rozszerzające klasyczny determinizm – rozumienie prognozowalności/predykcji zjawisk realnych, których stany określone są w sposób probabilistyczny.

Układy chaotyczne; granice prognozowalności

Rozważania prowadzone w poprzednich punktach dotyczyły zjawisk, które ze względu na ich niepełną określoność, brak wystarczających informacji czy nadmierną komplikację (złożoność) nie mogą być opisane przy pomocy modelu deterministycznego. To gdzie, kiedy i jak zajdzie interesujące nas zdarzenie (jak również, czy ono w ogóle zajdzie) jest nie do przewidzenia i dlatego niejako od początku wprowadzamy model probabilistyczny. Do niedawna było nie do pomyślenia, aby model deterministyczny mógł kryć w sobie bezład, brak porządku czy losowość (w jej potocznym rozumieniu). Modele deterministyczne mechaniki Newtona (1686 r.), a później równania Maxwella pola elektromagnetycznego stanowiły mocne oparcie dla wszechogarniającej zasady determinizmu poznawczego. Panowało powszechne przekonanie, że modele matematyczne, głównie w postaci równań różniczkowych, określają przyszłość ściśle i dokładnie, jeśli dany jest stan układu w chwili początkowej.

Te doniosłe osiągnięcia nie pozostawiały wątpliwości, że przyszłość jest prognozowalna i deterministyczna. Nic dziwnego, bo ówczesna „deterministyczna" matematyka pokazała zadziwiającą siłę w opisie rzeczywistości. W XVIII i XIX w. dynamika Newtona ciągle przyciągała umysły wielkich matematyków i uzyskiwała ważne uogólnienia. Należy tu wymienić nade wszystko: Lagrange'a (1736-1813) – który w znanym dziele *Mécanique analitique* przedstawił bardzo ogólną postać równań różniczkowych, opisujących układy mechaniczne spełniające prawa Newtona, Laplace'a – który w 1796 r. w swym 5-tomowym dziele *Mécanique celeste* wyjaśnił praktycznie wszystkie „szczegóły" ruchów orbitalnych w układzie słonecznym, czy wreszcie Hamiltona (1805-1865) – który ogólne równania Lagrange'a przetransformował do dużo wygodniejszej postaci, tworząc podstawy metody znanej obecnie jako formalizm Hamiltona.

Z drugiej strony, rozwój ścisłych metod analizy matematycznej w XIX w. pozwalał na rozwiązywanie trudnych problemów dotyczących własności rozwiązań układów równań różniczkowych i na subtelne rozpoznawanie trajektorii ruchu skomplikowanych układów dynamicznych. W tym kontekście na szczególną uwagę zasługują badania H. Poincaré (jednego z największych umysłów przełomu XIX i XX wieku), który w książce *Les méthodes nouvelles de la celeste* (Paris, Gauthier-Villars, 1892) przedstawił analizę bardzo trudnego problemu trzech ciał związanego ze złożonym oddziaływaniem Słońca, Ziemi i Księżyca. Poincaré był też pierwszym uczonym, który rozpoczął badania stabilności układów nieliniowych oraz rozpoznał, iż rozwiązania nieliniowych równań różniczkowych (deterministycznych) mogą wykazywać bardzo skomplikowane zachowanie w otoczeniu niestabilnych punktów stałych; była to pierwsza wskazówka, że regularne (deterministyczne) siły mogą generować w układach nieliniowych (deterministycznych) ruchy chaotyczne (losowe)! Poincaré pisał „... może się zdarzyć, że małe różnice w warunkach początkowych generują bardzo duże różnice w końcowej reakcji układu. *Mały błąd* w określeniu warunków początkowych może powodować *ogromny błąd* w reakcji układu. Prognoza (zachowania się) układu staje się niemożliwa...". Oczywiście, pisząc, „prognoza staje się niemożliwa", Poincaré miał na myśli klasyczne rozumienie prognozy – wedle którego przyszłe stany układu muszą być określone dokładnie i jednoznacznie.

Zjawisko „matematycznie zaobserwowane” przez Poincaré było przedmiotem dalszych badań; w pierwszych dekadach XX w. – przez matematyków – za pomocą głębokiej analizy topologicznej przestrzeni fazowej układów nieliniowych; należy tu wspomnieć rezultaty G.D. Birkhoffa (1927 r.) oraz ważny rezultat należący do A. N. Kołmogorowa, V.I. Arnolda i J. Mosera – znany obecnie jako KAM-twierdzenie. Ważne było rozpoznanie matematycznych mechanizmów przechodzenia ruchu regularnego w ruch chaotyczny oraz scharakteryzowanie tych obszarów przestrzeni fazowej, w których trajektorie układu wykazują zachowanie chaotyczne. Wydaje się, iż dopiero nowoczesne komputery znacząco przyśpieszyły badania nad chaosem w układach deterministycznych. W tym kontekście najbardziej znana jest praca E.N. Lorenza [16] – pracującego w dziedzinie fizyki atmosfery – dotycząca prostego modelu pogody (w postaci układu trzech nieliniowych zwyczajnych równań różniczkowych). Dzisiaj teoria chaosu deterministycznego jest już ukształtowaną dziedziną posiadającą bogatą literaturę (por. np. książki: Lichtenberg A.J., Lieberman M.A. [14], Tsonis A.A. [28] i cytowaną tam literaturę). Z metodologicznego punktu widzenia bardzo ważny jest fakt, że oto istnieje nowy typ zachowania się szerokiej klasy nieliniowych deterministycznych układów dynamicznych, w których (przy spełnieniu określonych warunków, np. między intensywnością wymuszenia zewnętrznego i wielkością tłumienia w układzie) występuje ruch chaotyczny (stochastyczny); ruch ten manifestuje się wysoką komplikacją trajektorii i lokalizuje się na pewnych podzbiorach przestrzeni fazowej zwanych atraktorami.

A zatem, układy dynamiczne nieliniowe, mimo iż są całkowicie deterministyczne i mogą być proste w swej strukturze (w tym układy mechaniki Newtona), nie mogą określić przyszłości dokładnie; po stosunkowo krótkim czasie musimy odwołać się do probabilistycznego opisu przyszłości. Fakt ten wzbudził zrozumiałe zdziwienie i zaskoczenie, bo oto silna wiara w moc mechaniki Newtona i w poznawczy determinizm załamała się. Warto w tym miejscu przytoczyć słowa wypowiedziane przez sir Jamesa Lighthilla (zajmującego w latach 80. XX w. tę samą katedrę w Uniwersytecie Cambridge co I. Newton trzysta lat wcześniej, byłego prezydenta Międzynarodowej Unii Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej) w dniu 8 kwietnia 1986 r. w jego wykładzie na uroczystej sesji poświęconej 300. rocznicy wydania fundamentalnego dzieła Newtona *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Słowa te przytaczamy tutaj wyjątkowo w oryginale za artykułem autora [15]):

„Here I have to pause, and to speak once again on behalf of the broad global fraternity of practioners of mechanics. We are all deeply conscious today that the enthusiasm of our forebears for the marvellous achievements of Newtonian mechanics led them to make generalizations in this area of predictability which, indeed, we may have generally tended to believe before 1960, but which we now recognize were false. We collectively wish to apologize for having misled the general educated public by spreading ideas about the determinism of systems satisfying Newton's laws of motion that, after 1960, were to be proved incorrect".

J. Lighthill w swym wykładzie dyskutuje szczegółowo implikacje istnienia chaosu na efektywność prognozowalności zjawisk (układów) chaotycznych. Ważna konkluzja polega na tym, że wspólną charakterystyczną cechą wszystkich deterministycznych układów chaotycznych jest istnienie określonego *horyzontu prognozowalności*. Jest to czas, poza którym rozwiązania równań ruchu (przy warunkach początkowych *bardzo* bliskich sobie) stają się znacząco od siebie odległe. Układy chaotyczne charakteryzują się bardzo wielką wrażliwością na warunki początkowe. Gdybyśmy nawet określili warunki początkowe z możliwie największą dokładnością (np. z dużą liczbą znaków po przecinku), to wpływ na prognozowalność będzie mało znaczący. Układy chaotyczne mają tę własność, że bliskie sobie trajektorie w chwili początkowej rozchodzą się w czasie ruchu eksponencjalnie. A eksperyment, który mógłby dostarczyć warunki początkowe z idealną, matematyczną precyzją (w istocie – z nieskończoną liczbą znaków po przecinku) jest niewykonalny. Tak więc problem prognozowalności układów chaotycznych wymaga metod statystycznych/probabilistycznych. Z tym jednak wiążą się pewne naturalne pytania. Na przykład: jakie wielkości (lub parametry) są najbardziej odpowiednie do charakteryzowania ruchu w obszarze chaotycznym? W jakim sensie i zakresie obliczenia numeryczne mogą być użyteczne do charakteryzowania ruchu chaotycznego? Jak odróżniać losowość chaosu deterministycznego od losowości, która jest obiektem teorii prawdopodobieństwa? Jaki rodzaj relacji może istnieć między procesem stochastycznym a chaotycznym układem dynamicznym? Na przykład, niech $X(t)$ będzie danym procesem stochastycznym Gaussowskim o funkcji korelacji $K(t_1, t_2)$; czy istnieje chaotyczny układ dynamiczny, który w sposób zadowalający aproksymuje realizacje procesu $X(t)$? Takie i inne pytania są przedmiotem aktualnych badań w zakresie chaosu deterministycznego.

Zrozumieć złożoność

Zjawiska omawiane wyżej (tj. związane z losowością czy deterministycznym chaosem) są jedynie pewną szczególną manifestacją czegoś bardziej ogólnego, obejmowanego słowem: złożoność (ang. *complexity*). Pojęcie to – trudne do ścisłego sprecyzowania – ma oznaczać wszystko, co jest bardzo skomplikowane i trudne do zrozumienia. Złożoność tkwi w zjawiskach przyrodniczych, chemicznych, społecznych i w układach technicznych, występuje w skalach bardzo małych (na poziomie mikro) i w skalach bardzo dużych. Ze złożonością zjawisk i układów spotykamy się niemal codziennie; a oto kilka przykładów: zmiany pogody, ruch uliczny, rozprzestrzenianie się pożaru czy epidemii, turbulentne przepływy cieczy, pękanie materiałów, zachowanie się instytucji społecznych i układów ekonomicznych, procesy w układach chemicznych i biologicznych itp. Układy złożone nie są na ogół ani całkowicie deterministyczne, ani całkowicie losowe, ale najczęściej wykazują obie te cechy. Zwykle wewnętrzna struktura układów złożonych i ich wzajemne oddziaływanie są bardzo skomplikowane i mogą zmieniać się w czasie.

Fizyka rozróżnia trzy podstawowe rodzaje układów: *izolowane* (bez oddziaływania z otoczeniem), *zamknięte* (nie pozwalające na wymianę materii, ale mogące wymieniać energię i informację) oraz *układy otwarte* – które mogą wymieniać z otoczeniem materię, energię i informację. Układem otwartym jest np. samochód, bo pobiera paliwo i wydala spaliny, przekształca energię chemiczną na mechaniczną, zaś poprzez światła ruchu dostarcza informacje na zewnątrz, ale także – różne instytucje społeczne, układy biologiczne itp. Układy złożone są w ogólności układami otwartymi, w których mogą zachodzić procesy nieodwracalne. W większości sytuacji układy złożone są układami dynamicznymi (ich stany zmieniają się w czasie), przy czym ich dynamika może być bardzo skomplikowana i trudna do scharakteryzowania. Tak więc złożoność może przybierać bardzo różnorakie postacie i dlatego trudno jest dać jej zadowalającą – uniwersalną, ogólną i obiektywną definicję. Wydaje się, że możliwa propozycja może być następująca: układy złożone – to otwarte układy naturalne lub wytworzone przez człowieka, których forma (struktura, morfologia) lub zachowanie wykazują szczególnie wysoką komplikację połączoną z takimi zjawiskami, jak: przepływ informacji, zmiana struktury, samoorganizacja itp.

Tak więc złożoność – to nade wszystko bogactwo różnych możliwych wewnętrznych struktur i zachowań. Ale złożoność może być też spostrzegana jako właściwość nie wyłącznie związana z badanym zjawiskiem czy układem, ale raczej jako subiektywna cecha odzwierciedlająca relacje między obserwatorem/badaczem i układem. Jest miarą trudności badacza związanych z rozpoznaniem układu. Jeśli więc fizyczna entropia charakteryzuje ilość pracy, jaką układ fizyczny jest zdolny wykonać, to wielkością, która w przypadku układu złożonego może pełnić analogiczną rolę, wydaje się być entropia informacyjna; określa ona bowiem ilość informacji „utkwionej" w układzie, którą trzeba wydobyć (np. przez pomiary, obserwacje), aby rozpoznać jego możliwe stany.

Jak zrozumieć funkcjonowanie naprawdę złożonych układów istniejących w otaczającym nas świecie; na przykład, złożonych układów/struktur społecznych? Wymagają one (dla swego istnienia) ciągłego dopływu energii, a także, bardzo często, dopływu informacji. Mogą one natychmiastowo zmieniać swą strukturę, jeśli zmienią się ich pewne ważne parametry.

Najczęściej struktury społeczne potrzebują dobrej sieci komunikacji, zapewniającej przepływ informacji między elementami składowymi. Układy złożone z istot żywych mają tę cechę, iż same elementy układu magazynują energię i informacje. Mogą się uczyć i zmieniać swe zachowanie zgodnie z nabytą wiedzą, włączając tworzenie nowych struktur. Elementy takich układów funkcjonują tylko przez pewien skończony czas i następnie odchodzą. W układach, w których elementami są ludzie, występują zjawiska, które w ogólności nie występują w układach fizycznych, np. pamięć i zdolność antycypacji. Chociaż pewne oznaki pamięci spotykamy w układach fizycznych (np. zjawisko histerezy w magnetyzmie czy w mechanice), to antycypacja wydaje się być znakiem inteligencji. Jedną z cech umysłu jest zdolność „spostrzegania przez czas" – do tyłu i do przodu. Istotną rolę odgrywają też intencje i emocje. Wszystko to wytwarza w układach, o których mówimy, wielką nieokreśloność i niepewność zachowań. W odróżnieniu od zjawisk badanych w fizyce, gdzie najczęściej fluktuacje odgrywają rolę drugorzędną, w układach społecznych losowe fluktuacje mogą odgrywać rolę zasadniczą; mogą bowiem spowodować, iż cały układ przyjmuje inną strukturę czasową i przestrzenną (por. I. Prigogine [21]). W odróżnieniu od układów klasycznej termodynamiki, mamy do czynienia z układami silnie nieliniowymi, funkcjonującymi z dala od stanu równowagi (który to stan nie zawsze jest łatwy do zdefiniowania).

W obliczu tych wszystkich właściwości układów złożonych, wskazanych wyżej, wyłania się naturalne pytanie: jakie powinno być najwłaściwsze podejście do naukowej analizy takich układów? W szczególności, jaki powinien być język matematyczny, w którym charakteryzowanie złożoności byłoby najbardziej efektywne? Oczywiście, trudno oczekiwać, iż w nauce o złożoności (w języku angielskim coraz częściej używana jest nazwa: *complexity science*) możliwe będzie sformułowanie jakichś ogólnych i uniwersalnych modeli (analogicznych do praw fizyki). Każdy układ złożony jest inny i ma swoistą komplikację. Nasuwa się tutaj stwierdzenie J.B. Wiesnera – doradcy prezydenta Kennedy'ego: „pewne problemy są zbyt skomplikowane, aby mogły być racjonalnie i logicznie rozwiązane; można poszukiwać ich zrozumienia, ale nie odpowiedzi" (por. [3]). Ale przecież uzyskane zrozumienie jednej złożoności może być wielce pomocne w rozpoznawaniu innych; poszukiwanie analogii zawsze było siłą nauki.

Złożoność algorytmiczna i informacja

Pojęciem, które od połowy lat 60. XX w. służy do charakteryzowania zarówno losowości, jak i złożoności układów, jest *złożoność algorytmiczna* (nazywana też algorytmiczną losowością, a także – algorytmiczną pojemnością informacyjną – por. [32]). Pojęcie to, wprowadzone niezależnie przez Solomonoffa [27], Kołmogorowa [12] i Chaitina [4], charakteryzuje losowość (która jednocześnie określa informację o „stopniu" złożoności) poprzez minimalną długość (tj. liczbę znaków binarnych) algorytmu, który charakteryzuje badany obiekt. Mówiąc bardziej dokładnie, idea złożoności algorytmicznej jest następująca.

Dla ilustracji rozważmy dwa ciągi znaków dwójkowego systemu liczenia, tj. ciągi złożone z zer i jedynek:

(A): 01010101010101010101,
(B): 10011010010110110010.

Jest oczywiste, iż ciąg (A) jest bardzo regularny i może być opisany algorytmem: „dziesięć {01}". Drugi ciąg (B) jest bardziej złożony i nie ma oczywistego prostego opisu (algorytmu). Można sobie wyobrazić wiele innych ciągów typu (B) o różnej długości i różnym stopniu komplikacji w występowaniu w nich zer i jedynek. Złożoność (lub losowość) algorytmiczną ciągu binarnego {s} definiujemy jako najkrótszy algorytm s* (np. program komputerowy) wystarczający do odtworzenia badanego ciągu {s} zer i jedynek; co oznaczamy: $k\{s\} = |s^*|$. Aby powyższa definicja miała walor jednoznaczności (długość algorytmu może zależeć od konstrukcji komputera), należy odwołać się do komputera uniwersalnego. Zwykle rolę tę spełnia komputer (maszyna) Turinga (por. [31]). Kołmogorow pokazał, że $k_u\{s\}$, tj. złożoność określona przy pomocy komputera uniwersalnego, jest zawsze mniejsza (lub równa) od sumy złożoności wskazanej przez każdy inny komputer i pewnej stałej A, zależnej od owego innego komputera (i niezależnej od badanego ciągu). Jeżeli ciąg {s} jest binarną reprezentacją liczby całkowitej to złożoność jest równa logarytmowi (przy podstawie 2) liczby znaków dwójkowych, występujących w tej reprezentacji.

W definicji podanej wyżej założyliśmy milcząco, że ciąg binarny {s} jest skończony. Jeśli mamy ciąg nieskończony {S} to jego złożoność $K(S)$definiuje się jako granicę $k_N\{s\}/N$, gdy N zdąża do nieskończoności (por. P. Martin-Löf [17], V.M. Alekseev, M..V. Yakobson [1]). Jeżeli dla ciągu binarnego nieskończonego $K(S)>0$ to ciąg uważany jest jako ciąg złożony (lub algorytmicznie losowy). Tę interpretację uzasadnia ważny rezultat otrzymany w pracy [17] i orzekający, iż każdy ciąg, dla którego $K(S)>0$, spełnia wszystkie możliwe do wykonania testy losowości.

Chociaż definicje powyższe dotyczą ciągów binarnych (czyli – obiektów matematycznych), to przyjmuje się, że w zastosowaniach do realnych zjawisk/układów złożonych ciągi te stanowią reprezentację empiryczną tych układów wyrażoną liczbowo (np. ciąg pomiarów temperatury chorego czy ogólniej – ciągi losowe, będące rezultatem dyskretyzacji procesów losowych). Tak więc, ujmując rzecz ogólnie – bez wnikania w subtelne problemy teorii, złożoność algorytmiczna pozwala stwierdzać, czy badane zjawisko jest losowe, czy nie i jaki jest stopień jego złożoności (por. naszą dyskusję w p. 2, dotyczącą kłopotów związanych z częstościowym definiowaniem prawdopodobieństwa).

Drugie ważne podejście do charakteryzowania złożoności i losowości związane jest z różnymi odmianami pojęcia *entropii*, które bez wątpienia – należy do ważniejszych pojęć współczesnej nauki. Z fizyki znamy pojęcia entropii Clausiusa, Boltzmanna i Gibbsa – odgrywające ważną rolę w XIX w. w budowaniu termodynamiki, kinetycznej teorii gazów i mechaniki statystycznej. Później, w roku 1948 C.E. Shannon uczynił z entropii podstawowe pojęcie teorii informacji, zaś Kołmogorow (1958) podał definicję entropii w celu charakteryzowania własności trajektorii ogólnych nieliniowych układów dynamicznych. Mimo iż sytuacje wymienione są różne, to jednak zawsze chodzi o ilościowe charakteryzowanie tkwiącej w zjawisku czy w układzie nieokreśloności, bezładu, losowości czy chaosu; odpowiednio zdefiniowana entropia jest ilościową miarą wymienionych właściwości.

Dla ilustracji rozważmy prosty układ X, który może znaleźć się w jednym z n możliwych stanów: $x_1, x_2, ..., x_n$. Każdy z tych stanów może być osiągnięty z prawdopodobieństwami, odpowiednio: $p_1, p_2, ..., p_n$; oczywiście, poszczególne prawdopodobieństwa muszą być większe lub równe zeru, a ich suma równa jest jedności. Entropia Shannona H jest liczbą definiowaną następująco:

$$H(X) = -(p_1 \log_2 p_1 + ... + p_n \log_2 p_n).$$

Ze względu na podstawę logarytmu: 2, jednostkami tak zdefiniowanej entropii są bity (dwójkowe jednostki entropii). Zauważmy, że jeżeli układ może przyjmować tylko dwie wartości z równymi prawdopodobieństwami ½ (jak w rzucie monetą), to $H = 1$ bit. A zatem, rzut monetą jest zjawiskiem losowym o jednostkowej entropii; bardziej skomplikowane zjawiska (o większej liczbie stanów) będą miały większą entropię. Badając zjawisko losowe (np. dokonując pomiarów), zmniejszamy jego entropię; im więcej informacji uzyskamy o zjawisku, tym mniej nieokreślone będą dla nas jego stany (tym mniejsza będzie jego entropia). Naturalne jest więc, aby ilość informacji mierzyć zmianą (zmniejszeniem) entropii. Dokonując pomiarów czy obserwacji, spostrzegamy, że o ile zmniejsza się entropia, o tyle zwiększa się nasza informacja o zjawisku. Oznaczając przez $I(X)$ całkowitą ilość informacji zawartej w układzie X, możemy przyjąć, że $I(X) = H(X)$. Odpowiada to stwierdzeniu Boltzmanna, że entropia jest miarą „zagubionych informacji". Entropia charakteryzuje więc pojemność informacyjną układu.

Podobnie jak rzut monetą generuje 1 bit entropii (lub informacji – bo to słowo używane jest częściej), w dynamicznych układach złożonych zachodzi skomplikowana generacja entropii, a jej charakteryzowanie stanowi ważne zadanie w rozpoznawaniu układów. Układy regularne – to układy, które nie generują entropii. Układy stochastyczne czy układy deterministyczne – chaotyczne charakteryzują się dodatnimi wartościami entropii (w tym przypadku często używaną miarą jest również entropia K-S, tj. Kołmogorowa-Sinaia). Jest wielce interesujące, że jeżeli reakcja deterministycznego układu chaotycznego (na zadane siły) zostanie zarejestrowana w dyskretnych chwilach czasu i wyrażona w postaci ciągu binarnego, to jego złożoność algorytmiczna jest równa entropii K-S (por. [32]). Bardzo ważnym przykładem złożoności są turbulentne przepływy cieczy i gazów. W odróżnieniu od przepływów spokojnych, laminarnych (które są w pełni przewidywalne i nie generują entropii), w przepływach turbulentnych zachodzi generacja entropii i jej przepływ między skalami makro- i mikroskopowymi. Mówi się więc, iż przepływ turbulentny jest źródłem entropii/informacji; można ilościowo oszacować prędkość zmieniającej się w czasie informacyjnej entropii w strumieniu turbulentnym. Nie wnikając w szczegóły poruszonych wyżej badań (nie są one celem tego eseju), chcemy tu jedynie wskazać na ogromną ważność języka teorii informacji w ilościowym badaniu układów złożonych. Mimo iż teoria informacji jest dziedziną dość rozwiniętą, to jednak jest zwyczajowo zawężana do specyficznych technicznych układów komunikowania się – zasad efektywnego kodowania i przesyłania informacji, jej transformacji, sposobów ochrony informacji (np. kryptografia) itp. Właściwe znaczenie teorii informacji jest jednak dużo szersze. Jak to już dawno podkreślał w swej książce S. Kullback (por. [13]), teoria informacji jest gałęzią teorii prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej; jej pojęcia i metody są bowiem odpowiednie do analizy dowolnego probabilistycznego systemu obserwacji, gdyż zawsze kiedy dokonujemy statystycznych obserwacji (oraz planujemy i przeprowadzamy eksperyment), poszukujemy informacji.

Jak to już wskazywaliśmy, informacja zawarta w układzie złożonym (np. biologicznym, społecznym, ekonomicznym) oraz przepływ informacji między jego elementami często mają zasadniczy wpływ na funkcjonowanie układu, w szczególności na jego złożoność dynamiczną. Pytania, jakie w tym kontekście nasuwają się, są na przykład następujące: jak w języku teorii informacji (i w jej jednostkach – bitach) scharakteryzować różnicę między wskazaniami modelu matematycznego i danymi empirycznymi? Jaką ilość entropii/informacji generuje badany układ dynamiczny w jednostce czasu przy różnych losowych wymuszeniach? Jak, ewentualnie, łączyć w równaniach ruchu dynamikę fizyczną z dynamiką informacji? Kwestie te są dyskutowane w artykule autora [24], a także w interesującej książce [9].

Prognozowalność; współczesne wyzwania

Przewidywanie zdarzeń przyszłych, tych z życia codziennego, jak i tych dotyczących zjawisk przyrodniczych, było zawsze pragnieniem człowieka. Ale istotą przyszłości jest to, iż jest nieznana, toteż – w ogólności – osnuta jest tajemnicą. Zwykłym ludziom, nie wyposażonym w narzędzia nauki, muszą wystarczać przepowiednie ludowe, „mądrość" wróżek, a w zakresie prognoz meteorologicznych – wnioskowanie z czasu przylotu ptaków, długości snu dzikich zwierząt, bólów w stawach itp. Ale i dla nauki problem wglądu w przyszłość zawsze stanowił wyzwanie. Bo prawdziwe, racjonalne prognozowanie zjawiska powinno opierać się na zrozumieniu jego mechanizmów; na takiej znajomości przyczyn przebiegu procesu, aby można rozszerzyć ją na stany przyszłe.

Chociaż gromadzony latami materiał obserwacyjny (np. dotyczący pogody czy zjawisk demograficznych) pozwalał na pewne nieśmiałe i przybliżone hipotezy dotyczące przyszłości, to jednak metodologicznie zadowalająca prognoza musi opierać się na *matematycznym modelu zjawiska*. Pomiary i opisy jakościowe były i są potrzebne, ale dopiero właściwa teoria pozwala je metodycznie wykorzystać. Nie oznacza to jednak, że istnienie modelu zjawiska/procesu ma zapewnić sukces prognozowania. Jak to wynika z naszych wcześniejszych rozważań, na przeszkodzie stoi losowość, chaos i złożoność. Tylko w sytuacjach kiedy model prognozowanego procesu jest liniowy i deterministyczny, możemy powiedzieć, iż prognozowanie jest możliwe; chociaż i tu należy mieć na uwadze trudności w idealnie dokładnym scharakteryzowaniu stanu procesu w chwili początkowej oraz błędy obliczeń numerycznych. Ale, niestety, dla większości zjawisk, które są ważne dla życia człowieka, modele jednocześnie liniowe i deterministyczne są mało użyteczne. Rozważmy na przykład, prognozę procesu transportu zanieczyszczeń w gruntach i atmosferze. Ze względu na niejednorodność i komplikację geometrycznej struktury takich ośrodków, jak: grunty, skały czy podziemne akweny wodne ogólnie akceptowany model matematyczny, charakteryzujący ewolucję koncentracji „zanieczyszczacza" (w każdym punkcie i chwili czasu), ma postać liniowego równania różniczkowego cząstkowego, ale z losowymi współczynnikami. Toteż prognoza tego procesu może być dokonywana tylko w drodze analizy probabilistycznej (por. np. [23]).

Jednym z naczelnych wyzwań, które stają przed nauką XXI w. jest matematyczny opis dynamiki atmosfery, mórz i oceanów w celu uzyskania możliwości prognozowania klimatu. Procesy te są wyjątkowo złożone, gdyż zawierają w sobie różnorodne nieliniowe procesy fizyczne, które oddziałują między sobą w bardzo szerokim zakresie skal przestrzennych, od milimetrów do dziesiątek tysięcy kilometrów. Mamy tu do czynienia z problemami prognozy wysoce skomplikowanych układów dynamicznych, opisywanych przez układy nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych dla funkcji losowych zależnych od punktu przestrzeni i czasu. Efektywna analiza takich równań jest związana z bardzo poważnymi trudnościami. Sposobem pokonywania tych trudności jest wprowadzanie hipotez upraszczających analizę. To jednak zwykle prowadzi do zubożenia fizycznej natury badanych zjawisk i do, mniejszej lub większej, niezgodności rezultatów teoretycznych z rzeczywistością. Obecne wysiłki dotyczące prognozowania klimatu opierają się na wykorzystaniu komputerów dużej mocy. Podobne, poważne trudności związane są też z efektywną prognozą pogody dla dłuższych okresów czasu (por. [25]).

Inna klasa zjawisk, których prognozowanie wydaje się być szczególnie trudne (jeśli w ogóle możliwe), to zjawiska/procesy ekonomiczne. Istniejące prace w tej dziedzinie wskazują z jednej strony – na wielką ważność problematyki prognostycznej w ekonomii, zaś z drugiej – na fakt, iż rezultaty ekonomicznych analiz prognostycznych są ciągle niezadowalające. Przyczyny trudności można sobie łatwo wyobrazić, nawet nie będąc specjalistą w zakresie ekonomii. Układ ekonomiczny jest wysoce złożony; komplikacje związane są, między innymi, z antycypacją ludzkich zachowań, które zależą od wielu różnorodnych czynników społecznych, politycznych, psychologicznych czy biologicznych. Poza tym, w sferze ekonomii, w odróżnieniu od zjawisk fizyki czy nawet meteorologii, bardzo trudno o niezawodne „prawa natury", raz i na zawsze wiążące ważne zmienne dynamiczne.

Współczesna ekonomia wyróżnia w funkcjonowaniu krajowego systemu ekonomicznego trzy podstawowe elementy (por. [29]): *rynek dóbr, rynek pieniądza i rynek pracy*. Te trzy rynki są ze sobą w nieustannej interakcji, dążąc do osiągnięcia stanu równowagi między sobą. Rynek dóbr (oddziałując z pozostałymi dwoma) określa/zapewnia takie rodzaje działań, jak: inwestycje, konsumpcja, import i eksport. Rynek pieniądza określa takie zmienne, jak: stopy procentowe i zasoby pieniężne. Te zmienne z kolei oddziałują na decyzje na rynku dóbr. Rynki dóbr i pieniądza łącznie określają zapotrzebowanie na dobra i usługi (sektor potrzeb). Rolę „zaopatrzeniowca" spełnia trzeci rynek, tj. rynek pracy; określa on dostarczanie dóbr i usług i poprzez to wpływa na ceny, uposażenia i zatrudnienie. Równowagę osiąga się, gdy zaopatrzenie w dobra i usługi pokrywa się z zapotrzebowaniem na nie. Takie poszukiwanie równowagi leży u podstaw funkcjonowania różnych modeli ekonomii. Trzeba jednak zaznaczyć, iż pojęcie równowagi w systemie ekonomicznym nie ma jednoznacznej definicji, a nawet jest przedmiotem kontrowersji i spornych poglądów co do jego użycia do celów prognozowania. Ze względu na wskazaną wyżej specyfikę procesów ekonomicznych, brak jest konsensusu co do podstawowych zasad ich modelowania, a zatem także ich prognozy. Istnieje wiele modeli konkurencyjnych, z których każdy ma swoje zalety; rozpoznawanie podstawowych mechanizmów ekonomicznych jest ciągle w stanie rozwoju. W każdym przypadku modele matematyczne układów ekonomicznych powinny jednak odzwierciedlać zmienność ich struktury, nieliniowy charakter oddziaływań wewnętrznych oraz nieuniknione losowe fluktuacje. Ważne jest też, aby podstawowa informacja empiryczna o procesach rzeczywistych została jak najlepiej „zakodowana" w modelu. Nie ulega wątpliwości, że są to ważne wyzwania dla przyszłych badań. *Nie od razu bogowie odsłaniają śmiertelnym wszystko; ale z biegiem czasu, poszukując, znajdziemy to, co lepsze (Ksenofanes)*, tj. bardziej podobne do prawdy.

Piśmiennictwo

[1] Alekseev V.M., Yakobson M.V. (1981), *Symbolic dynamics and hyperbolic dynamic systems*, „Physics Reports", vol.75, Nr 5.

[2] Amsterdamski S. (1964), *O obiektywnych interpretacjach pojęcia prawdopodobieństwa*, [w:] Amsterdamski S., Augustynek Z., Mejbaum W., *Prawo, konieczność, prawdopodobieństwo*, Warszawa, Książka i Wiedza.

[3] Cambel A.B. (1993), *Applied Chaos Theory: A paradigm for complexity*, Academic Press, Boston.

[4] Chaitin G.J. (1966), *On the length of programs for computing binary sequences*, „Journ. of the Assoc. of Computing Machinery", vol. 13, p. 547.

[5] Carnap R. (1950), *Logical Foundations of Probability*, Chicago.

[6] Carnap R. (1947), *Probability as a Guide of Life*, „Journal of Philosophy", Vol. 44, 141-148.

[7] Feller W. (1968, 1971), *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, vol. 1, 3rd ed., vol. 2, 2nd ed. Wiley, New York (istnieje wydanie w języku polskim).

[8] Fine T.L. (1973), *Theories of Probability: An Examination of Foundations*, Academic Press, N. York – London.

[9] Ingarden R.S., Kossakowski A., Ohya M. (1997), *Information Dynamics and Open Systems: Classical and Quantum Approach*, Dordrecht, Kluwer.

[10] Kolmogorow A.N. (1933), *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstrechnung*, Springer, Berlin (w języku rosyjskim: Moskwa, 1936).

[11] Kolmogorow A.N. (1963), *On tables of random numbers*, Sankhya, Ser. A, vol. 25, 369-376.

[12] Kolmogorow A.N. (1968), *Logical basis for information theory and probability theory*, „IEEE Trans. on Information Theory", vol. IT14, Nr 5, 662-664.

[13] Kullback S. (1959), *Information Theory and Statistics*, New York, Chapman-Hall.

[14] Lichtenberg A.J., Lieberman M.A. (1992) *Regular and Chaotic Dynamics*, Springer-Verlag, N. York (2^{nd} ed.).

[15] Lighthill J. (1986), *The recently recognized failure of predictability in Newtonian dynamics*, „Proc. Roy. Soc.", A407, 35-50.

[16] Lorenz E.N. (1963), *Deterministic nonperiodic flow*, J. Atmosph. Sci., vol. 20, 130-141.

[17] Martin-Löf P. (1966), *The Definition of random sequences, Information and Control*, vol. 9, 602-619.

[18] Nalimov V. (1976), *Probabilistyczny model języka*, PWN, Warszawa.

[19] Nalimov V. (1981), *Faces of Science*, ISI Press.

[20] von Plato J. (1994), *Creating Modern Probability: Its Mathematics, Physics and Philosophy in Historical Perspective*, Cambridge University Press.

[21] [Prigogine I. (1976), *Order through fluctuation: self-organization and social systems*, [w:] Jantsch E., Conrad H. (Eds) *Evolution and consciousness: Human systems in transition*, Addison-Wesley, Reading.

[22] Russel B. (1956), *Human Knowledge*, London.

[23] Sobczyk K., Kirkner D.J. (2001), *Stochastic Modelling of Microstructures*, Birkhauser, Boston.

[24] Sobczyk K. (2001), *Information Dynamics: premises, challenges and results*, „Mech. Systems and Signal Processing", vol. 15, N° 3, 475-498.

[25] Sobczyk K. (2002), *Stochastyczne modelowanie zjawisk w przyrodoznawstwie i technice*, [w:] *Nauki techniczne u progu XXI wieku* (red. M. Kleiber), Warszawa IPPT PAN.

[26] Sobczyk K. (2005), *Stochastic Dynamics of Engineering Systems: Origins, Challenges and Results* (plenary lecture at 21^{st} IUTAM Congress), [w:] *Mechanics of the 21^{st} Century* (Eds: Gutkowski W., Kowalewski T. A.), Springer.

[27] Solomonov R. J. (1964), *A formal theory of inductive control, Information and Control*, vol. 7, 1-22.

[28] Tsonis A.A. (1992), *Chaos: From Theory to Applications*, Plenum Press, new York, London.

[29] Westcott J.H. (1986), *Application of control theory to macro-economic models*, „Proc. Roy. Soc. London", A407, 89-101.

[30] Zabczyk J. (1989), *Kłopoty z pojęciem prawdopodobieństwa*, „Prace Inst. Matematycznego PAN", Seria B, Preprint 19.

[31] Zurek W.H. – Editor (1990), *Complexity, entropy and the physics of information*, Addison-Wesley, Reading, MA.

[32] Zurek W.H. (1989), *Algorithmic randomness and physical entropy*, „Phys. Rev. A", vol. 40, N° 8.

Randomness, complexity, predictability: toward understanding

The article discusses the basic methodological questions and difficulties associated with randomness and complexity of numerous real phenomena. A special attention is focused on the relation of the axiomatic probability theory to the real world. Also the issues of tackling complexity in science, including predictability problems, are discussed in detail.
Key words: randomness, axiomatic probability, chaos, limits of predictability, algorithmic complexity, information flow.