PIOTR PIERAŃSKI

Nierozsądna nauka

Zdrowy rozsądek jest w cenie. Trudno znaleźć człowieka, który twierdziłby, iż zdrowy rozsądek może być przeszkodą w dochodzeniu do prawdy. Bez wątpienia, myślenie zdroworozsądkowe jest niezmiernie przydatne w życiu codziennym. Brak zdrowego rozsądku prowadzi do kłopotów. Włożenie palca do gotującej wody nieodmiennie kończy się poparzeniem. Wjechanie w zakręt pokrytej lodem drogi z prędkością 100 km/godz. niechybnie prowadzi do wypadku. Zdrowy rozsądek nie jest przekazywany genetycznie, kształtuje się w naszej podświadomości w tysiącach doświadczeń życiowych. Jest wiedzą, z której posiadania nie zdajemy sobie sprawy, a z której podświadomie korzystamy każdego dnia. Jej zakres zmienia się z wiekiem, jest inny dla ludzi, których doświadczenia życiowe były inne. Jest znikoma w wieku dziecięcym, poszerza się i gra istotną rolę w życiu dorosłym, staje się skarbem na starość. Czy istnieją sytuacje, w których wiedza ta okazuje się balastem, przeszkodą uniemożliwiającą osiągnięcie celu? Jak przekonuje nas historia nauki, w szczególności historia matematyki i fizyki, tak właśnie jest: wielkie przełomy w tych naukach pojawiały się niemal wyłącznie wtedy, gdy zdrowy rozsądek został stłumiony, gdy rozumowanie weszło na ścieżkę, która ze zdroworozsądkowego punktu widzenia wydawała się wieść albo do nikąd, albo do błędów. Postaram się przedstawić kilka przykładów takich właśnie sytuacji, opisać ich bohaterów i odkrycia, których dokonali, pokonując barierę zdrowego rozsądku.

Będąc fizykiem, zacznę od przykładu z tej właśnie dziedziny wiedzy. Obserwując świat wokół nas, dostrzegamy przedmioty, które się poruszają. Obserwacje te prowadzą nas do wniosku, iż wszelki ruch ma swą przyczynę – gdy przyczyna ta znika, ruch ustaje. Podajmy prosty przykład. Leżąca na poziomym stole książka jest nieruchoma. Możemy wprawić ją w ruch, pchając. Gdy jednak przestajemy pchać, książka się zatrzymuje. Obserwacje tego rodzaju prowadzą nas do oczywistego, z punktu widzenia zdrowego rozsądku, prawa natury:

> *Ciało porusza się, jeśli działa na nie siła. Ergo: jeśli na ciało nie działa żadna siła, ciało pozostaje nieruchome.*

Tak myśleli rozsądni starożytni. Tak myślał rozsądny Arystoteles. Tak i dziś myślą rozsądne dzieci, zanim na lekcji fizyki poznają pierwszą zasadę dynamiki Newtona. A przecież jest zgodnie z tą zasadą jest inaczej:

> *Jeśli na ciało nie działa żadna siła* (*albo działające na nie siły równoważą się*), *ciało to porusza się ruchem jednostajnym* (*lub pozostaje w spoczynku*).

Prof. dr hab. Piotr Pierański, Politechnika Poznańska

Wydaje się, że pierwszym człowiekiem, który zdołał pokonać zdrowy rozsądek i doszedł do wniosku, iż jednostajny ruch ciała nie wymaga działania żadnej siły, był Galileusz, który uświadomił sobie, że gdy przestajemy pchać kamień, to zatrzymuje się on nie dlatego, że żadna siła już na niego nie działa, ale właśnie dlatego, że nadal pozostaje on pod działaniem siły działającej w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu, a więc hamującej ruch ciała. Tą siłą jest siła tarcia. Gdy równomiernie przesuwamy książkę po stole, porusza się ona ruchem jednostajnym nie dlatego, że działa na nią stała siła, ale dlatego, że siły na nią działające, siła wywierana przez naszą ręką i siła tarcia, sumują się do zera, a więc w efekcie żadna siła na nią nie działa.

Podobnych przykładów odkryć dokonanych tylko dzięki temu, iż komuś udało się pokonać zdrowy rozsądek, znajdziemy w fizyce klasycznej więcej, jednak prawdziwe spektakularne przykłady pojawiają się w fizyce relatywistycznej i kwantowej. Zanim do nich przejdziemy, podajmy jakiś przykład z dziedziny matematyki.[1]

Zastanówmy się nad określaniem liczebności zbiorów. Jeśli mamy w domu biblioteczkę, liczba książek, które się w niej znajdują, może zostać precyzyjnie określona. Jak? Ano, trzeba książki policzyć. Wskazujemy kolejne książki palcem, mrucząc pod nosem: *jeden, dwa, trzy*, ... Gdy palec wskaże ostatnią książkę i wymruczymy ostatnią liczbę, proces liczenia kończy się: liczba książek jest równa ostatniej wymruczanej liczbie. Metoda jest pewna, musimy jednak uważać, by mruczane liczby były kolejnymi liczbami naturalnymi (nie wolno, jak to czynią dzieci, mruczeć: *jeden, dwa, trzy, piętnaście, osiem, dwadzieścia jeden*...), by nie pominąć żadnej książki ani żadnej nie wskazać więcej niż raz. Uzyskane wyniki pozwalają nam porównywać liczebności zbiorów. Jeśli w biblioteczce Adama jest 100 książek, a w biblioteczce Ewy 101, to nie ma wątpliwości, iż biblioteczka Ewy jest większa. Z punktu widzenia matematyka, liczenie sprowadza się do ustalenia jedno-jednoznacznej relacji pomiędzy elementami analizowanego zbioru i elementami podzbioru liczb naturalnych. Jeśli nie zależy nam na wyznaczeniu konkretnych liczb określających liczebność biblioteczek Adama i Ewy, a wyłącznie na zbadaniu, która z nich jest większa, możemy postąpić inaczej. Bierzemy po jednej książce z obu biblioteczek i układamy je w pary. Jest oczywiste, iż w tej procedurze, gdy wyjmiemy ostatnią książkę z biblioteki Adama i ułożymy ją w parze z książką wyjętą z biblioteki Ewy, to w tej ostatniej pozostanie jeszcze jedna książka. Tu nie ma żadnych tajemnic. Wszystko jest jasne.

Problemy pojawiają się, gdy zaczynamy porównywać zbiory nieskończone. Najprostszym takim zbiorem jest zbiór liczb naturalnych: $\{1, 2, 3, \ldots\}$. On nie ma końca. Jeśli wymienimy jakąś liczbę, możemy wymienić liczbę następną, większą o jeden. W zbiorze liczb naturalnych mamy liczby parzyste: $\{2, 4, 6, \ldots\}$. Spróbujmy je policzyć. Wskazu-

[1] Problemy z dziedziny teorii mnogości opracowano na podstawie: A. A. Fraenkel, *Abstract Set Theory*, North-Holland 1961; R. L. Vaught, *Set Theory. An Introduction*, Birkhauser 1985.

jemy 2, mruczymy *jeden*, wskazujemy 4, mruczymy *dwa* itd. Liczenie nigdy się nie kończy, ale sposób jest dobry, wiemy bowiem, iż nie pomijamy żadnej liczby parzystej ani żadnej z nich nie wskażemy więcej niż raz. Dochodzimy do wniosku, że zbiór liczb parzystych jest również nieskończony. Wiemy więcej: ponieważ łączenie liczb parzystych z liczbami naturalnymi obejmuje całe te zbiory, są one *równoliczne*. Tu budzi się nasz zdrowy rozsądek i mówi: *Jak to, przecież zbiór liczb parzystych jest podzbiorem zbioru liczb naturalnych, nie może więc być tak, by zbiory te nazywać równolicznymi*. Trzeba było geniuszu Georga Cantora, by oprzeć się zdrowemu rozsądkowi i dojść do wniosku, że wszystko jest OK. Dziś każdy student matematyki wie, iż ten paradoksalny wynik, że zbiór nieskończony jest równoliczny ze swoim podzbiorem właściwym, jest papierkiem lakmusowym nieskończoności. Zbiór nie może być nieskończony, jeśli nie można wskazać jakiegoś jego podzbioru właściwego, z którym on sam, w całości, nie byłby równoliczny.

Zbiory równoliczne ze zbiorem liczb naturalnych nazywamy *przeliczalnymi*. Cantor odkrył, że, choć zdrowy rozsądek znów podpowiada nam, iż to niemożliwe, bo *przecież liczb wymiernych jest znacznie więcej niż naturalnych!*, zbiór liczb wymiernych też jest przeliczalny. Sprawa okazuje się dziecinnie prosta, jeśli dowiemy się, jak ułożyć na płaszczyźnie liczby wymierne, by można było je zacząć liczyć, wskazując palcem i mrucząc *jeden, dwa, trzy*....

Problemy pojawiają się jednak, gdy zastanowić się, jak to uczynił Cantor, nad zbiorem liczb rzeczywistych. Wiadomo było, że to zbiór nieskończony (bo zawiera w sobie zbiór liczb naturalnych), ale czy i on jest przeliczalny? Odpowiedź odnajdujemy, studiując teorię mnogości i docierając w niej do tzw. dowodu przekątniowego Cantora, jednego z tych miejsc matematyki, do których może dotrzeć i laik. Przedstawiony przez niego dowód wykonany został metodą *reductio ad absurdum*, to dowód nie wprost: zakładamy, iż zaprzeczenie tego, czego chcemy dowieść, jest prawdą i pokazujemy, iż takie założenie prowadzi do sprzeczności. W rozważanym tu przypadku koncentrujemy się na małej części zbioru liczb rzeczywistych – zbiorze liczb większych od zera, ale mniejszych od 1, i zakładamy, iż jest on przeliczalny, tzn. liczby rzeczywiste z tego zbioru dają się zestawić w pary z liczbami naturalnymi w jedno-jednoznaczny sposób. Takie zestawianie w pary to w gruncie rzeczy tworzenie dwukolumnowej tabeli: w pierwszej kolumnie wpisujemy kolejne liczby naturalne, w drugiej kolumnie zestawione z nimi liczby rzeczywiste. Twierdzimy, iż w tej nieskończonej tabeli znajdują się wszystkie liczby z badanego zbioru. Tak właśnie uczynił Cantor, a następnie pokazał, iż analizując tę tabelę liczba po liczbie, jest w stanie zanotować na boku liczbę, która jest większa od 0 i mniejsza od 1, a więc należy do analizowanego zbioru, a której na pewno w tej tabeli nie ma! Sprzeczność. Wynika z niej, iż założenie, które uczyniliśmy na początku rozumowania, musiało być fałszywe. Zbiór liczb rzeczywistych okazał się nieprzeliczalny.

Jeśli zastanowić się nad znaczeniem opisanego wyżej wyniku Cantora, to dojdziemy do wniosku, iż był on pierwszym człowiekiem, który, pokonując zdrowy rozsądek, odważył się postawić hipotezę, iż *nieskończoność nieskończoności nierówna*.

Współcześni Cantorowi matematycy buntowali się przeciwko sprzecznym ze zdrowym rozsądkiem wynikom, które publikował. Więcej, protestowali wręcz przeciwko samemu zajmowaniu się zbiorami nieskończonymi. Charles Hermite w swym liście do Mittag-Lefflera pisał w 1883 r.: *Czytanie prac Cantora wydaje mi się prawdziwą torturą ... nikt z nas nie ma ochoty iść jego śladem*. Trzeba było wielu lat, by matematycy docenili wagę nierozsądnych twierdzeń dowiedzionych przez Cantora. Przytoczmy tu słynne, cytowane w niemal każdym podręczniku teorii mnogości zdanie, wypowiedziane przez Davida Hilberta: *Nikt nie wygna nas z raju stworzonego przez Cantora*. Dlaczego zapoczątkowana przez Cantora teoria mnogości nazywana jest przez Hilberta „rajem”? Jest tak między innymi, dlatego, że to w tym właśnie dziale matematyki dowieść można twierdzeń, których sprzeczność ze zdrowym rozsądkiem jest najbardziej wyraźna. Paradoksalność niektórych twierdzeń teorii mnogości okazała tak silna, iż zaniepokoiła samych matematyków, który starali się dociec jej przyczyn. Okazało się, iż winowajcą jest jeden z aksjomatów teorii mnogości, zwany aksjomatem wyboru – śledztwo wykazało, że dowód każdego z paradoksalnych twierdzeń korzystał z tego aksjomatu.

Rozwińmy nieco hasło „aksjomat”. Matematyka jest nauką, która chętnie korzysta z techniki zwanej aksjomatyzacją. Budując jakiś dział, przyjmuje się pewną liczbę pojęć podstawowych, których się nie wyjaśnia, i pewną liczbę twierdzeń zwanych aksjomatami, których prawdziwości się nie dowodzi. Zbiór aksjomatów teorii to jej fundament – dowód każdego kolejnego twierdzenia musi z nich, najczęściej pośrednio, korzystać.

Jest tu jednak pewien problem: zanim zaczniemy korzystać z przyjętych aksjomatów, należałoby dowieść, iż są one niezależne i niesprzeczne. Niezależne, tzn. że żadnego z nich nie da się wywieść z pozostałych. Niesprzeczne, tzn. że żadnego z nich nie można sfalsyfikować, opierając się na pozostałych. Dowody niesprzeczności przyjętego zbioru aksjomatów nie są jednak proste, więc się ich w ogólności nie przeprowadza. Pytania o niesprzeczność nie można jednak pominąć, gdy dowodzone twierdzenia stają się tak silnie paradoksalne, iż można zacząć podejrzewać, że coś jest nie w porządku, że któryś z aksjomatów może być sprzeczny z innymi.

Nie możemy oczywiście wchodzić tu w aksjomatykę teorii mnogości, powiedzmy jednak, jak brzmi wspomniany aksjomat wyboru i jaki jest jego status w teorii mnogości.

Wyobraźmy sobie sklep z nasionami. Nasiona różnego rodzaju znajdują się w oddzielnych torebkach. Każda torebka to zbiór. Kolekcja tych torebek to rodzina zbiorów. Aksjomat wyboru mówi, iż można spełnić życzenie klienta, który prosi o *po jednym nasionku z każdej torebki*. Możliwość spełnienia tej prośby wydaje się oczywista. Czy jest coś prostszego? Wystarczy wziąć pustą torebkę i włożyć do niej po jednym nasionku z każdej z torebek znajdujących się w sklepie. Nie widzimy tu żadnej pułapki. A jednak matematycy podejrzewali, iż życzenie klienta może okazać się niespełnialne, a więc cały aksjomat trudny do zaakceptowania. Problemy pojawiają się, gdy kolekcja nasion jest nieskończenie liczna, w szczególności gdy jest to nieskończoność nieprzeliczalna. Gdy kolekcja jest nieprzeliczalna, nie wiadomo, jak poinstruować subiekta, który miałby polecenie klienta spełnić, bowiem nieprzeliczalnej kolekcji torebek nie da się zawiesić na nawet nieskończonym rządku haczyków. Nie można mu więc powiedzieć: *Niech się Pan przejdzie wzdłuż półki i weźmie po jednym nasionku z każdej torebki.* W dyskusji nad aksjomatem wyboru prezentowano różne podejście do tego problemu. Można na przykład stwierdzić: *Przecież nie chodzi o to, jak dokonać wyboru, ale o to, że w zasadzie jest on zawsze możliwy.* Kontestacja takiego punktu widzenia prowadzi do zakazu używania aksjomatu wyboru w przypadkach, gdy nie można podać konstruktywnego przepisu jego zastosowania. Większość matematyków jest jednak przeciwna takiemu samoograniczeniu. Ich punkt widzenia jest inny: *Nikt nie może zakazać nam korzystania z aksjomatu wyboru, jeśli tylko korzystanie z niego nie prowadzi do twierdzeń sprzecznych z innymi aksjomatami.* Przyjęcie takiego punktu widzenia jest jednak możliwe tylko wtedy, gdy niesprzeczność aksjomatu wyboru z innymi aksjomatami jest prawdą. Dowód tej niesprzeczności nie jest sprawą trywialną, został jednak podany. Dziś już wiemy, iż teoria mnogości zbudowana na zbiorze aksjomatów, wśród których znajduje się aksjomat wyboru, nie jest wewnętrznie sprzeczna. Każde z jej twierdzeń musi być więc traktowane w równie poważny sposób bez względu na to, jak bardzo dziwne, sprzeczne ze zdrowym rozsądkiem, nam się wydaje. Największą sławą cieszy się tu twierdzenie o paradoksalnym podziale kuli dowiedzione przez polskich matematyków Stefana Banacha i Alfreda Tarskiego[2]. Powiedzmy, o co w nim chodzi, używając języka życia codziennego:

> *Dowolną kulę można rozmontować na kilka części, z których można zmontować dwie kule identyczne z kulą wyjściową.*

Dla każdego, kto posiada choć krztynę zdrowego rozsądku, jest oczywiste, że to niemożliwe. Rozmnażanie przedmiotów to domena czarodziejów. W dowodzie tak absurdalnego twierdzenia musi tkwić błąd. Warto zerknąć do pracy, w której opublikowano dowód tego absurdalnego twierdzenia. Tam musi być błąd. Powinien być oczywisty. Powinniśmy dostrzec go natychmiast. Niestety, zerknięcie nie wystarcza, bowiem słynne twierdzenie jest w niej tak sformułowane, iż trudno się domyśleć, że jego potoczny sens jest taki, jak to wyżej przedstawiliśmy. Trzeba trochę uporu, by przedrzeć się przez te zasieki. Kilka lat temu udało mi się to uczynić. Korzystałem tu z późniejszych, znacznie bardziej przejrzystych wersji dowodu.[3]

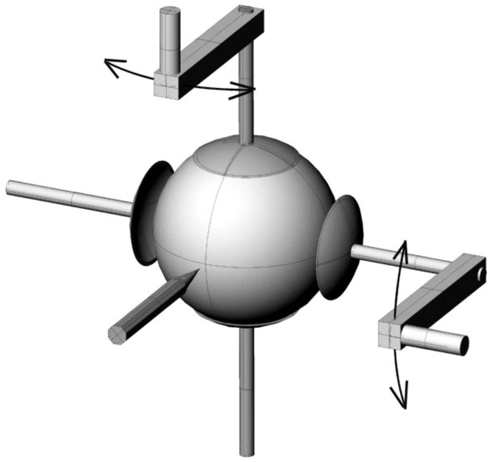
---

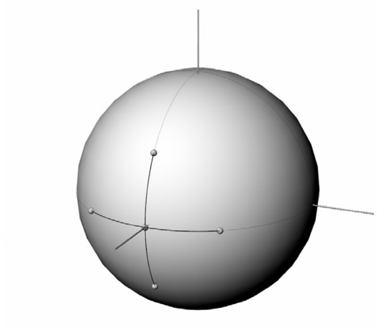
[2] St. Banach i A. Tarski, *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*, Fund. Math. 6, 244 (1927).

[3] S. Wagon, *The Banach-Tarski Paradox*, Cambridge University Press 1985.

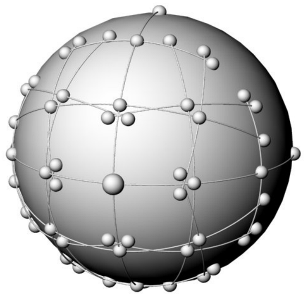
Wyobraźmy sobie kulę zamocowaną w urządzeniu pozwalającym obracać ją wokół dwu prostopadłych do siebie osi, powiedzmy pionowej i poziomej. Kąty wykonywanych obrotów – w prawo, w lewo, w górę i w dół, są stałe. Po każdym obrocie ołówek zamocowany na trzeciej osi zaznacza po jego dociśnięciu do kuli punkt na jej powierzchni. Urządzenie to pozwala wytrasować na kuli przeliczalny zbiór o ciekawych własnościach. Prześledźmy jego konstrukcję.

Punkt wyjściowy zaznaczamy, przyciskając ołówek do kuli w jej początkowym położeniu. Następnie chwytamy kulę w parę uchwytów pozwalających obracać ją wokół osi pionowej i po obrocie w prawo i w lewo od położenia wyjściowego zaznaczamy na niej dwa nowe punkty. Podobnie czynimy, obracając kulę w górę i w dół. Po wykonaniu opisanych wyżej operacji ujrzymy zaznaczony na kuli czteroelementowy zbiór w kształcie krzyża; punkt zaznaczony w etapie wyjściowym stanowi jego centrum.

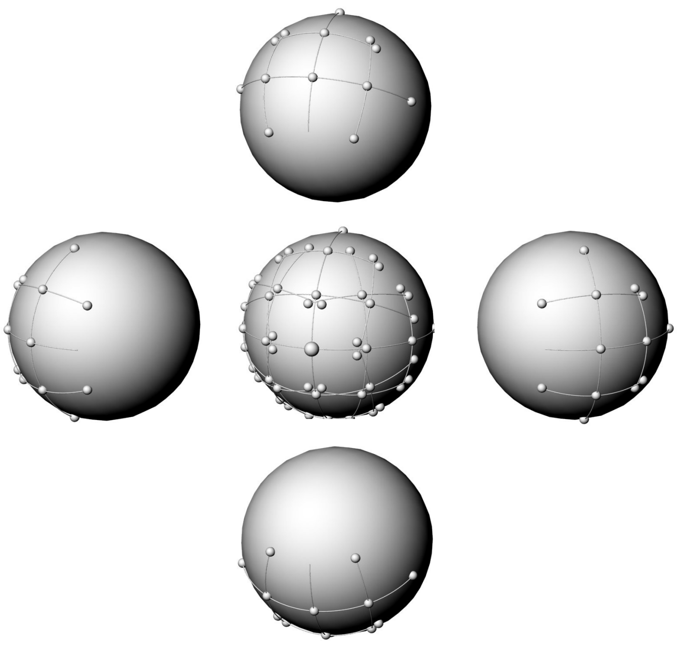




Kolejny etap to rozbudowa otrzymanego już zbioru. Orientujemy kulę tak, by pod ołówkiem znalazł się jeden z zaznaczonych w poprzednim etapie punktów i obracając ją w prawo, w lewo, w górę i w dół, zaznaczamy trzy nowe punkty. Napisałem trzy, mimo iż obroty były cztery, ponieważ jeden z nich jest odwrotnością obrotu wykonanego w poprzednim etapie, więc nie prowadzi do wyznaczenia na powierzchni kuli nowego punktu. Ponieważ zbiór punktów wytrasowanych w poprzednim etapie był czteroelementowy, a każdy z nich został w obecnym etapie otoczony przez trzy nowe punkty, po wykonaniu wszystkich działań zbiór wytrasowany na powierzchni kuli powiększył się o 12 punktów. Zauważmy, iż jego wyjściowa, krzyżowa struktura została zachowana. Wykonywanie kolejnych, podobnie zdefiniowanych etapów procedury trasowania wyznacza na kuli zbiór przeliczalny. Jest istotne, iż przy odpowiednim wyborze kątów obrotu, żadne dwa punkty tego zbioru nie pokrywają się i że zbiór ma strukturę krzyża. Patrząc na niego w kierunku prostopadłym do punktu wyjściowego, zobaczymy jego cztery ramiona: górne, dolne, prawe i lewe. Podzbiory te są przystające. Na przykład, obrót górnego ramienia w prawo powoduje, iż pokrywa się ono z prawym ramieniem. Z tego punktu widzenia możemy powiedzieć, że wyjściowy zbiór przeliczalny podzieliliśmy na cztery „równe" części (plus dodatkowy punkt leżący w środku krzyża).

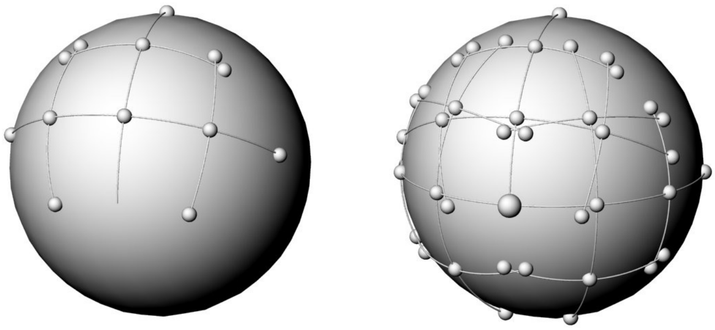


Fragment przeliczalnego zbioru BT definiowanego na powierzchni kuli w dowodzie twierdzenia Banacha-Tarskiego. Nieco większy punkt widoczny w środku zbioru jest punktem wyjściowym. Na rysunku ukazano ten fragment zbioru, który uzyskujemy po trzech etapach procedury.



Zbiór BT ma strukturę krzyża. Jego ramiona – górne, lewe, prawe i dolne – są wzajemnie przystające. Centralnie umieszczony punkt wyjściowy nie jest elementem żadnego z ramion.

Rozmontujmy krzyż, oddzielając jego ramiona od punktu wyjściowego. Weźmy ramię górne i obróćmy je wokół poziomej osi w dół. Co zobaczymy? Coś bardzo dziwnego: obrócone ramię górne staje się identyczne ze „znacznie większym" podzbiorem wyjściowego krzyża, a mianowicie ze sumą mnogościową jego lewego, górnego i prawego ramienia. W gruncie rzeczy jest to więc wyjściowy zbiór pozbawiony jedynie dolnego ramienia. (Oczywiście, by opisane wyżej „napuchnięcie" obracanego zbioru miało miejsce, transformacja obrotu musi zostać wykonana na całym, nieskończonym zbiorze ramienia).



Obrót górnego ramienia w dół powoduje, iż staje się ono identyczne z sumą mnogościową ramion: lewego, górnego i prawego. Przedstawiony na rysunku podzbiór ramienia jest skończony. W obróconym zbiorze dorysowano punkty należące do następnego pokolenia punktów.

Ale przecież mamy to ramię – jest ono jednym z elementów wyjściowego podziału. Dołączmy je więc do obróconego w dół górnego ramienia. W efekcie otrzymujemy zbiór identyczny z wyjściowym. Jeśli podobnie postąpimy z ramionami bocznymi (jedno z nich odpowiednio obrócimy i dołączymy drugie), otrzymamy drugą kopię wyjściowego zbioru.

Podsumujmy. Zdefiniowaliśmy na kuli zbiór przeliczalny. Rozmontowaliśmy go na pięć części (cztery przystające z sobą ramiona plus punkt środkowy). Z czterech z nich (ramion) zmontowaliśmy dwie repliki wyjściowego zbioru. Pozostał nam jeszcze dodatkowy punkt.

Przedstawione wyżej rozumowanie obejmuje jedynie przeliczalny podzbiór powierzchni kuli, można je jednak rozszerzyć najpierw na całą powierzchnię kuli, a potem na całą jej objętość. Poszerzenie to wymaga jednak użycia aksjomatu wyboru. Naszkicujmy drogę rozumowania, które umożliwia rozszerzenie techniki duplikacji podzbioru przeliczalnego powierzchni kuli na całą powierzchnię.

Rozważany wyżej przeliczalny podzbiór powierzchni kuli został wygenerowany przy pomocy obrotów z pewnego, przypadkowo wybranego punktu wyjściowego. Ponieważ podzbiór ten, będąc zbiorem przeliczalnym, nie pokrywa całej powierzchni kuli, muszą istnieć jej inne podzbiory przeliczalne o strukturze identycznej (przystające) z podzbiorem rozważanym. Podzbiory te są parami rozłączne, a ich suma mnogościowa pokrywa całą powierzchnię kuli. Ponieważ podzbiory te są przeliczalne, a musimy pokryć nimi zbiór nieprzeliczalny, musi ich być nieprzeliczalnie wiele.

Podsumujmy nasze rozważania: powierzchnię kuli można rozłożyć na nieprzeliczalną rodzinę przystających ze sobą, parami rozłącznych podzbiorów przeliczalnych.

Wybierzmy teraz z każdego tych podzbiorów jeden punkt i umieśćmy go w jednym, wspólnym zbiorze. Będzie to oczywiście zbiór nieprzeliczalny. Sporządźmy sobie pieczątkę, która po przyciśnięciu do powierzchni kuli zaznaczy na niej cały ten zbiór, a następnie, używając tej pieczątki w taki sposób, w jaki wyżej używaliśmy wyżej ołówka, obracajmy kulą w górę, w dół, w prawo, w lewo itd. i przyciskajmy do powierzchni kuli pieczątkę, tworząc przeliczalną rodzinę kopii zbioru wyjściowego, pokrywająca już całą kulę. Rodzina kopii ma omawianą wyżej strukturę krzyża i w analogiczny sposób można dokonać jej duplikacji, a duplikacja tej rodziny to w gruncie rzeczy duplikacja całej powierzchni kuli. Łącząc każdy punkt powierzchni kuli z jej środkiem przy pomocy promieni, możemy omówioną wyżej konstrukcję rozszerzyć na całą objętość kuli, a więc z jednej kuli zrobić sobie dwie identyczne z wyjściową. (Uważny czytelnik, który uchwycił sens przedstawionego wyżej rozumowania, zauważył z pewnością, iż procedura duplikacji jest nawet nieco za dobra, bowiem prócz dwu kul identycznych z wyjściową pozostały nam jeszcze pewne resztki. Banach i Tarski wyjaśniają, jak się ich pozbyć, grzebiąc je bez śladu w jednej z dwu nowych kul).

Analizując całe przeprowadzone wyżej rozumowanie, możemy sobie zadać pytanie, gdzie znajduje się w nim ten najistotniejszy krok, dzięki któremu duplikacja kuli jest możliwa, bez którego nie można by jej dokonać. Ten krok to sporządzenie pieczątki odwzorowującej zbiór punktów wybranych z nieprzeliczalnej rodziny zbiorów przeliczalnych. W zbiorze tym każdy zbiór rodziny jest reprezentowany przez jeden punkt; jest reprezentowany raz i tylko raz. Nie wiadomo, jak konkretnie dokonać wyboru punktów, które w końcu znajdą się na pieczątce, ale aksjomat wyboru mówi, że to jest możliwe.

Istnieje podchwytliwe pytanie, które zdrowy rozsądek każe nam zadać, gdy prezentujemy mu dwie kule, każdą o objętości identycznej z objętością kuli wyjściowej: *Ile wynoszą objętości części, na które wyjściowa kula została rozmontowana?* Pytanie jest podchwytliwe, bowiem zdrowy rozsądek wie, iż z jednej strony suma objętości wszystkich części, na które rozmontowaliśmy kulę wyjściową, musi być równa jej objętości, a z drugiej strony objętości dwa razy większej, bo przecież z części tych zmontowaliśmy dwie kule identyczne z wyjściową. No właśnie, *Ile wynoszą objętości tych części?*, powtarza z sardonicznym uśmiechem zdrowy rozsądek, przekonany, że wpadliśmy w pułapkę bez wyjścia. Odpowiedź, jakiej udzielają nam Banach i Tarski, wygląda na wykręt:

Nie wiadomo. Objętości tych części nie można ustalić – są niemierzalne. Przykład ten uczy nas, iż i w matematyce są sytuacje, w których pewnych pytań nie wolno zadawać. Zwróćmy tu przy okazji uwagę na pewną prawidłowość. Pomysł wykorzystania aksjomatu wyboru do zdefiniowania zbiorów niemierzalnych nie był oryginalnym pomysłem naszych wielkich rodaków. Wydaje się, że pierwszym matematykiem, który na niego wpadł, był Włoch, Giuseppe Vitali. Prześledzenie ciągu publikacji, na którego końcu pojawia się słynna praca polskich matematyków, ujawnia, iż autorzy kolejnych prac zawsze korzystali z pomysłów swych poprzedników. Taki bieg zdarzeń jest w nauce regułą. Wielkie odkrycia rzadko pojawiają się w niej znienacka, zazwyczaj są poprzedzone ciągiem odkryć drobniejszych. Choć w końcu noszą nazwisko jednego z nich, mają najczęściej wielu ojców.

Z formalnego punktu widzenia procedura duplikacji jest w porządku. To, że zdrowy rozsądek burzy się przeciwko niej, nie może stanowić argumentu na jej niepoprawność. Należy się raczej zastanowić, w jakiej sytuacji doświadczalnej procedura duplikacyjna opisana w dowodzie twierdzenia Banacha-Tarskiego może okazać się rzeczywistością. Struktury teorii matematycznych są jak ekscentryczne w swej formie ubrania, szyte przez pełnego fantazji, szalonego krawca w nadziei, że gdzieś we wszechświecie znajdują się istoty, na których ubrania te będą leżały jak ulał. Doświadczenie przekonuje, że tak jest w istocie. Choć niektóre z tych ubrań przeleżały się w szafie kilkadziesiąt lat, dziś noszone są z dumą przez świeżo odkrytych przybyszy z naukowego kosmosu. Z takim właśnie stanem rzeczy mamy do czynienia w przypadku geometrii nieeuklidesowej. Powiedzmy nieco więcej na ten temat.[4]

Aksjomatów niebudzącej sprzeciwu zdrowego rozsądku geometrii euklidesowej jest pięć. Cztery pierwsze przyjmowane są bez zastrzeżeń. Aksjomat piąty, mówiący o tym, że *jeśli dwie proste przetniemy trzecią, a sumy kątów wewnętrznych utworzonych przy tym przecięciu okażą się różne od 180 stopni, to proste te będą się przecinały, a przecięcie znajdzie się po tej stronie, po której suma kątów wewnętrznych jest mniejsza od 180 stopni*, miał od początku inny status i sam Euklides usiłował go nie używać, gdy nie było takiej potrzeby. Nie chodzi tu o to, iż piąty aksjomat mógłby coś mieć na pieńku ze zdrowym rozsądkiem. Nie, wręcz przeciwnie – wydawał się oczywisty. Problem polegał na tym, iż podejrzewano, że nie jest on niezależny od pozostałych aksjomatów i próbowano tego dowieść. Sławę zdobyły prace Adriena Legendre'a, który w następnych wydaniach swych *Elementów geometrii* publikował następne, nieodmiennie błędne dowody piątego aksjomatu, i Girolamo Saccheriego (1667-1733), który usiłował przeprowadzić dowód nie wprost.

[4] Pisząc tę część niniejszego eseju, korzystałem z podręcznika M. J. Greenberga, *Euclidean and non-euclidean geometries. Development and history*. W.H. Freeman, San Francisco 1972.

Wyjaśnijmy tok jego rozumowania. Rozważmy czworoboki, których kąty wewnętrzne przy podstawie są proste, a boki parami przystające. Z aksjomatu piątego wynika, iż kąty wierzchołkowe takich czworoboków też powinny być proste. Jeśli jednak wyłączymy z dowodu piąty aksjomat, to korzystając wyłącznie z pierwszych czterech aksjomatów, zdołamy dowieść, że kąty wierzchołkowe czworoboków są przystające. Gdyby, korzystając z tych aksjomatów, udało się nam dowieść dodatkowo, iż kąty te są również proste, to zależność piątego postulatu od pierwszych czterech zostałaby ujawniona.

Próby bezpośredniego dowodu prowadzonego tą drogą nie dawały rezultatu, więc Saccheri spróbował dowodu nie wprost. W dowodzie tym trzeba pokazać, iż założenie, że kąty wierzchołkowe nie są proste, prowadzi do sprzeczności. Problem jest tu złożony, bowiem mówiąc; *kąty wierzchołkowe nie są proste*, mamy w gruncie rzeczy na myśli dwie możliwości: albo a) *kąty wierzchołkowe są ostre*, albo b) *kąty wierzchołkowe są rozwarte*. Trzeba zbadać każdą z nich oddzielnie. Przyjęcie przez Saccheriego drugiej z możliwości, tj. iż kąty wierzchołkowe są rozwarte, szybko doprowadziło go do sprzeczności. Gdyby udało mu się jeszcze pokazać, iż założenie ostrości kątów wierzchołkowych również prowadzi do sprzeczności, to zależność piątego aksjomatu od czterech pierwszych zostałaby dowiedziona. Niestety, mimo wielu prób, sprzeczności założenia o ostrości kątów wierzchołkowych z pozostałymi aksjomatami nie udało się wykazać. Sfrustrowany Saccheri dał upust swej bezsilności, stwierdzając w końcu: *Hipoteza kątów ostrych jest absolutnie fałszywa, bo ... jest sprzeczna z samą istotą linii prostej!* Zdrowy rozsądek zwyciężył. Ten emocjonalny, z pozoru racjonalny argument, miał w opinii Saccheriego zastąpić formalny dowód sprzeczności założenia a) z pozostałymi aksjomatami. Szukając tej sprzeczności, Saccheri natknął się na coś niepokojącego. Jak stwierdził, przyjęcie założenia o ostrości kątów wierzchołkowych wiedzie do bardzo dziwnych, sprzecznych ze zdrowym rozsądkiem twierdzeń, jednak których sprzeczności z pozostałymi aksjomatami nie sposób wykazać. Saccheriemu zabrakło odwagi, by przyjrzeć się z większą uwagą tym osobliwościom. Jako pierwszy człowiek ujrzał kilka niezwykłych zwierząt żyjących w królestwie geometrii hiperbolicznej, ale zamiast je opisać, stwierdził jak ten podróżnik z dowcipu o po raz pierwszy zobaczonej żyrafie, *takich zwierząt nie ma*.

Nie jest moim celem opisywanie całej, fascynującej historii odkrycia geometrii nieeuklidesowych. Można dziś stwierdzić, iż odkrywców, którzy niezależnie od Saccheriego dotarli do paradoksalnego, sprzecznego ze zdrowym rozsądkiem świata geometrii nieeuklidesowych, było kilku: Lambert, Gauss, Bolyai, Łobaczewski, Riemann. Niektórym z nich świat ten wydał się tak paradoksalny, a należał do nich i wielki Gauss, że powstrzymali się od publikowania prac na jego temat, innych zachwycił. Janos Bolyai pisał do swego ojca: *...odkryłem tak wspaniałe rzeczy, że zdumiałem się, i byłoby prawdziwym nieszczęściem, gdyby zostały stracone. ... z niczego stworzyłem dziwny, nowy* *wszechświat*. Historia odkrycia geometrii nieeuklidesowych jest naprawdę warta przestudiowania.

Dziś, gdy zajrzawszy na przykład do Wikipedii, możemy sobie przeczytać doskonale opracowane, bo przetrawione przez dydaktyków, przetestowane na całych pokoleniach studentów wprowadzenia do geometrii nieeuklidesowych, i obejrzeć rysunki prezentujące dwuwymiarowe geometrie o dodatniej i ujemnej krzywiźnie, wszystko staje się jasne. Problem sprowadza się do tego, jak definiujemy scenę, na której grają aktorzy dramatu zwanego geometrią: punkty, proste, odcinki, i kim oni są. Jak pisał Poincaré: *Aksjomaty geometrii nie są ani syntetycznymi, a priori intuicjami, ani faktami eksperymentalnymi. Są konwencjami... Jedna geometria nie może być bardziej prawdziwa od innej geometrii; może być jedynie bardziej wygodna*. Gdy budujemy stół, geometria euklidesowa jest doskonała, gdy jednak budujemy teorię czasoprzestrzeni w pobliżu czarnej dziury, ta oczywista dla zdrowego rozsądku wersja geometrii okazuje się zupełnie nieadekwatna. Dochodzimy tu współczesnych konsekwencji odkrycia geometrii nieeuklidesowych, w szczególności tych o krzywiźnie dodatniej. Okazało się, że to budzące i dziś sprzeciw zdrowego rozsądku ubranie uszyte przez szalonych matematyków noszone jest z gracją przez dziwne stworzenie odkryte przez fizyków: ogólną teorię względności. Ale zanim powiemy o niej parę słów, przypomnijmy jej młodszą siostrę: szczególną teorię względności.

Rozważania przeprowadzone we wstępie doprowadziły nas do zaakceptowania sprzecznej z codziennymi obserwacjami konkluzji, iż jeśli na jakieś ciało nie działa żadna siła, to ciało to będzie poruszało się ruchem jednostajnym. A jeśli ruch ciała nie jest jednostajny? To jasne – działa na nie siła. Opis ruchu wywołanego działaniem stałej siły dostarcza nam II zasada dynamiki Newtona: ruch pod działaniem stałej siły jest przyspieszony; przyspieszenie jest stałe: proporcjonalne do działającej siły i odwrotnie proporcjonalne do masy ciała. Konsekwencje tej prostej zasady są również proste. Na przykład ta: prędkość ciała, na które działa stała siła, rośnie w równym tempie i jest tylko kwestią czasu, jaką osiągnie wartość. Nie ma tu żadnych granic. Prędkość ciała może rosnąć w nieskończoność. Jeśli jednak zaczniemy interesować się prędkościami realnych ciał, które poruszają się w naszym świecie, stwierdzimy ze zdziwieniem, że istnieje prędkość graniczna, której żadne z nich nie przekracza – to prędkość światła w próżni. Podróżujące w pustej przestrzeni światło budziło niepokój fizyków. Od czasu Maxwella wiedziano, że światło jest falą, że jak wszystkie inne fale niesie energię. Pytanie, na jakie nie znano odpowiedzi, brzmiało: *czym jest ośrodek, w którym fala ta jest wywoływana?* Był on tak nieuchwytny, że nazwano go eterem. Pomysł doświadczenia, w którym eter musiałby ujawnić się, jest prosty. Wyobraźmy sobie, że znajdujemy się w lecącym nad idealnie gładką powierzchnią oceanu balonie. Ocean jest idealnie gładki, tak gładki, że nie ma na czym zaczepić wzroku. Jak w tej sytuacji stwierdzić, czy w ogóle poruszamy się względem niego? Jest na to sposób, wystarczy wrzucić do oceanu kamień i wywołać na jego powierzchni falę. Jeśli balon, w którym się znajdujemy, wisi nad oceanem nieruchomo, zobaczymy, jak fala ta rozchodzi się we wszystkich kierunkach z równą prędkością. Jeśli jednak poruszamy się względem oceanu, prędkość fal względem nas będzie inna w kierunku, w którym porusza się balon, a inna w kierunku przeciwnym. W kierunku ruchu balonu, balon goni fale, więc ich prędkość względem balonu równa jest prędkości fal względem oceanu minus prędkość balonu względem tego ośrodka. W kierunku przeciwnym prędkości te dodają się. Jeśli wyobrazić sobie, że oceanem jest wypełniający przestrzeń kosmiczną eter, a balonem Ziemia, to wykrycie ruchu Ziemi względem eteru powinno być możliwe, bowiem prędkość światła w kierunku, w którym Ziemia porusza się na swej orbicie względem Słońca, powinna być mniejsza niż w kierunku przeciwnym. Doświadczenie, którego celem było wykrycie ruchu Ziemi względem eteru, przeszło do historii fizyki. Jego autorem i głównym wykonawcą był Albert Abraham Michelson, amerykański fizyk urodzony w Strzelnie. Nie możemy wchodzić w szczegóły techniczne, stwierdźmy jedynie, że doświadczenie nie było łatwe, że by je wykonać, Michelson skonstruował pomysłowe urządzenie, zwane dziś interferometrem Michelsona, że pomiary wykonywano przez wiele miesięcy, a więc dla różnych położeń Ziemi na jej okołosłonecznej orbicie i w końcu, że zakończyło się niepowodzeniem: choć bardzo na to liczono, ruch Ziemi względem eteru nie został wykazany. Konsekwencje negatywnego wyniku doświadczenia Michelsona okazały się dewastujące dla zdrowego rozsądku wielu fizyków, ale nie dla twardej logiki Alberta Einsteina, bowiem dla niego było oczywiste, iż wynik doświadczenia musi być negatywny, bowiem żadne doświadczenie wykonywane w inercjalnym układzie odniesienia nie może wykazać, że układ ten się porusza. Idąc śladem tej myśli, Einstein zbudował spójny obraz świata oglądanego z poruszających się względem siebie ruchem jednostajnym układów odniesienia. Obraz ten okazał się zdumiewający. Poruszające się pręty, skracają się. Poruszające się zegary, tykają wolniej. Przyspieszenie ciał poddanych działaniu stałej siły maleje w miarę, jak rośnie ich prędkość. Paradoksalność, sprzeczność ze zdrowym rozsądkiem relatywistycznego świata jest trudna do zaakceptowania, a że musi zostać zaakceptowana, przekonują nas setki doświadczeń. Uchwycenie istoty szczególnej teorii względności nie jest bynajmniej proste. Gdy ją poznajemy, zdrowy rozsądek spycha nas ustawicznie z drogi logicznego myślenia. Dyskusja nad jej paradoksami w gronie laików jest prawdziwą męką. Trudno im zaakceptować, iż to, co wydaje się im oczywiste, oczywiste nie jest. Trudno jest im przyznać, iż zdrowy rozsądek jest tu nie pomocą, ale dokuczliwą przeszkodą. Będzie na miejscu, jeśli zacytujemy tu Alberta Einsteina: *Zdrowy rozsądek jest w gruncie rzeczy jedynie cienką warstewką uprzedzeń nabytych w większości przed 18. rokiem życia*. Być może, gdyby nasze dzieciństwo upłynęło w pobliżu akceleratora, w którym przyspieszane cząstki osiągają prędkości równe 99,999% prędkości światła, w otoczeniu ludzi, którzy na co dzień używają pojęć fizyki relatywistycznej, w tej warstewce uprzedzeń znalazłoby się i to, że poruszające się zegary tykają wolniej. Nie znam jednak nikogo, kto miałby w swym zdrowym rozsądku takie uprzedzenie.

Bardzo lubię wykładać szczególną teorię względności. Wskazanie studentom równań, które musimy znać, i tych sposobów ich interpretacji, których powinniśmy użyć, by nie dać się zdrowemu rozsądkowi zepchnąć z drogi poprawnego rozumowania, jest prawdziwą przyjemnością.

Kłopoty ze zdrowym rozsądkiem pogłębiają się, gdy poznajemy ogólną teorię względności. Naturalną strukturą matematyczną, w ramach której formułowane są równania ogólnej teorii względności, jest geometria Riemanna. By równania te sformułować, Einstein musiał nauczyć się rachunku tensorowego, naturalnego języka geometrii Riemanna. Używając tego języka, Einstein sformułował równanie wiążące rozkład mas (tensor energii-pędu) znajdujących się w czasoprzestrzeni z jej zakrzywieniem (tensorem metrycznym). Minęło wiele lat od dnia, w którym Karl Schwarzschild wysłał z rosyjskiego frontu I wojny światowej list do Einsteina, w którym przedstawił znalezione przez siebie rozwiązanie równania Einsteina, opisujące krzywiznę czasoprzestrzeni w otoczeniu masy punktowej, zanim pogodzono się z wynikającymi z tego rozwiązania konsekwencjami fizycznymi, między innymi tą, iż wokół punktowej masy istnieje kulisty obszar o promieniu zależnym od masy, z którego nic, a więc i promieniowanie elektromagnetyczne, nie jest w stanie się wydostać. Konfrontując przewidywania ogólnej teorii względności z przewidywaniami jej starszej siostry, odkrywamy, że zegary nie muszą się wcale poruszać, by chodzić wolniej, wystarczy, że znajdą się w silniejszym polu grawitacyjnym. Gdy pole to staje się dostatecznie silne, a tak dzieje się na horyzoncie czarnych dziur, w ogóle przestają chodzić. (Oczywiście, taki ogląd rzeczywistości mają obserwatorzy znajdujący się z dala od źródła pola grawitacyjnego). Zaakceptowanie tych przewidywań ogólnej teorii względności, które opisują przebieg różnych zjawisk fizycznych w pobliżu bardzo dużych, ekstremalnie gęstych mas, jest bardzo trudne nie tylko dla laików, ale i dla zawodowców kosmologów. Rozterki te jeszcze się pogłębiają, gdy korzystając z równania Einsteina, próbują oni wydedukować przeszłość i przyszłość całego wszechświata. Sam Einstein toczył swą prywatną walkę ze zdrowym rozsądkiem, próbując tak zmodyfikować odkryte przez siebie równanie, by opisywany przez nie wszechświat mógł być, jak to mu podpowiadał zdrowy rozsądek, wszechświatem statycznym. Dopisując do odkrytego równania sztuczny, sugerowany przez zdrowy rozsądek człon, popełniał, jak sam to później określał, życiową pomyłkę, a że koniec końców, to może i nie była pomyłka, przekonują nas ostatnie odkrycia kosmologii.

Drugą z wielkich teorii fizycznych, podczas odkrywania których stoczono wielki bój ze zdrowym rozsądkiem, jest mechanika kwantowa. Tu rozziew pomiędzy tym, co podpowiada nam zdrowy rozsądek, a tym, co wynika z odkrytych równań, jest szczególnie szeroki. Wielu najwybitniejszych fizyków dawało upust swej frustracji związanej z trudnościami, jakie każdy umysł napotyka, starając się związać obraz świata wyłaniający się z równań mechaniki kwantowej z tym jego obrazem, który mamy, obserwując świat na poziomie makroskopowym. Laureat Nagrody Nobla, Richard Feynman, szeptał konfidencyjnie w jednym ze swych wykładów: ... *secret, secret, close the doors! we always have had a great deal of difficulty in understanding the world view that quantum mechanics represents*.

Mechanika kwantowa jest czymś w rodzaju recepty na rozwiązywanie realnych problemów fizycznych, ale każe się nam posługiwać przy znajdowaniu tego rozwiązania funkcją falową – narzędziem, które sensu fizycznego nie ma. Mamy do swej dyspozycji wspaniały samochód, ale nie mamy zielonego pojęcia, jak i dlaczego on działa. Samochód działa doskonale, pozwalając nam dotrzeć do miejsc, do których chcemy dotrzeć, ale gdy jego kierownicę powierzymy ludziom z fantazją, dowozi nas w takie miejsca, których z punktu widzenia zdrowego rozsądku być nie powinno na tym świecie. Bunt zdrowego rozsądku jest powszechny, gdy pokazać mu wyniki doświadczeń Alaina Aspecta nad parami skorelowanych fotonów. To, że mechanika kwantowa przewiduje poprawnie ich wynik, wcale nas nie uspokaja, mamy raczej wrażenie, że serwując nam swe magiczne rachunki, odmawia nam wglądu w to, co tam **naprawdę** się dzieje. Przeczucie, iż świat opisywany przez mechanikę kwantową może okazać się sprzeczny ze zdrowym rozsądkiem, odnajdujemy już w pracach jej twórców. Sławę zdobyła tu praca Einsteina, Podolsky'ego i Rosena, w której pokazano, że zwycięża pragmatyzm: nie rozumiejąc narzędzia, używamy go. Nie jest pewne, czy kiedykolwiek zrozumiemy.

Przedstawione wyżej przykłady przekonują nas, iż sprzeciw zdrowego rozsądku nie może być powodem, dla którego naukowiec odmówi akceptacji jakieś teorii naukowej. Jak więc odróżnić sprzeczną ze zdrowym rozsądkiem naukę od sprzecznej ze zdrowym rozsądkiem pseudonauki? Problem wygląda na skomplikowany, ale skomplikowany nie jest. Nauka wypracowała dobry, choć niekiedy wolno działający system weryfikacji: każde odkrycie musi zostać poddane krytycznej ocenie międzynarodowej społeczności naukowców poprzez jego publikację w powszechnie dostępnym, recenzowanym czasopiśmie. Nie ma innej drogi. System wygląda na mafijny, ale taki nie jest. Jeśli spojrzymy w historię nauki, odnajdziemy przykłady prac, które okazały się błędne, choć w pierwszym momencie wzbudziły zainteresowanie. Znajdziemy też prace, których błędność starano się wykazać, ale które w końcu okazywały się poprawne. Ten system działa: żaden diament nie został uznany za kamień i żaden kamień nie został na trwałe oprawiony w złoto należne diamentowi. Nie odmawia się certyfikatu poprawności żadnej teorii, którą weryfikuje doświadczenie, choćby jej przewidywania były nie tylko sprzeczne ze zdrowym rozsądkiem, ale i budziły grozę. A tak przecież jest, gdy zastanowimy się na przykład nad losem gatunku *Homo sapiens sapiens*, który dziś we względnym spokoju żyje na planecie zwanej Ziemią. Kiedyś sądzono, że jest ona centrum wszechświata. Dziś wiemy, że w porównaniu z całym wszechświatem jest czymś w rodzaju kosmicznego pyłu, na którym zalęgło się oparte na związkach węgla życie. Zalęgło się tylko dzięki temu, że pył ten znajduje się w odpowiedniej odległości od gwiazdy o odpowiedniej wielkości. Wiemy, dlaczego gwiazda ta świeci. Wiemy, że źródłem wysyłanego przez nią promieniowania jest biegnąca w jej jądrze reakcja termojądrowa. Wiemy też jednak, że wodór, będący jej paliwem, ulegnie wyczerpaniu w perspektywie kilku miliardów lat. Zanik ciśnienia wyzwalanego w reakcji promieniowania spowoduje grawitacyjny kolaps jądra gwiazdy. Temperatura gwałtownie wzrośnie. Gorące, zewnętrzne części gwiazdy ulegną rozdęciu, pochłaniając zamieszkałą przez człowieka planetę. *Homo sapiens sapiens* wie dziś z całą pewnością, jaką daje mu stworzona przez niego nauka, że Ziemia nie będzie jego domem w nieskończoność, że jeśli się z niej nie wyprowadzi – zginie. Czy istnieją szanse przeżycia? Nie wiadomo. Wiadomo jednak, że jeśli są, zostaną odkryte właśnie na gruncie nauki, budzącej sprzeciw zdrowego rozsądku, wspaniałej nauki.

Unreasonable science

It is argued that most of the great discoveries in science, in particular in mathematics and physics, are from the point of view of the common sense unreasonable. A few examples of such discoveries are discussed, among them the Banach-Tarski paradoxical duplication of a sphere, the non-Euclidean geometry, the special theory of relativity and the quantum mechanics.

Key words: unreasonable science, common sense, Banach-Tarski paradox